Bases Matemáticas

Aula 11 – Funções

Rodrigo Hausen

31 de outubro de 2012

Definição de função

Definição 1

Dados dois conjuntos D, C, uma ***função de*** D ***em*** C *é uma relação entre esses conjuntos tal que*

$$\text{todo } x \in D \text{ corresponde a exatamente um elemento } y \in C$$

Definição de função

Definição 1

Dados dois conjuntos D, C, uma ***função de*** D ***em*** C *é uma relação entre esses conjuntos tal que*

$$\text{todo } x \in D \text{ corresponde a exatamente um elemento } y \in C$$

O elemento y é chamado de ***imagem*** *de x. É comum denotar a imagem de x por $f(x)$.*

Definição de função

Definição 1

Dados dois conjuntos D, C, uma ***função de*** *D* ***em*** *C é uma relação entre esses conjuntos tal que*

$$\text{todo } x \in D \text{ corresponde a exatamente um elemento } y \in C$$

O elemento y é chamado de ***imagem*** *de x. É comum denotar a imagem de x por $f(x)$.*

Notação: para dizermos que f é uma função de D em C, usaremos:

$$f : D \to C$$

Definição de função

Definição 1

Dados dois conjuntos D, C, uma ***função de*** *D* ***em*** *C é uma relação entre esses conjuntos tal que*

$$\text{todo } x \in D \text{ corresponde a exatamente um elemento } y \in C$$

O elemento y é chamado de ***imagem*** *de x. É comum denotar a imagem de x por $f(x)$.*

Notação: para dizermos que f é uma função de D em C, usaremos:

$$f : D \to C$$

Nomenclatura: Dizemos que D é o **domínio** da função e C é o **contradomínio** da função.

Criando funções

Há várias maneiras de se criar uma função, mas sempre precisamos definir o domínio e o contradomínio inicialmente.

Criando funções

Há várias maneiras de se criar uma função, mas sempre precisamos definir o domínio e o contradomínio inicialmente.

Por enumeração: estabelecido o domínio e o contradomínio, podemos definir a função enumerando-se diretamente as associações entre cada elemento do domínio e um elemento do contradomínio.

Criando funções

Há várias maneiras de se criar uma função, mas sempre precisamos definir o domínio e o contradomínio inicialmente.

Por enumeração: estabelecido o domínio e o contradomínio, podemos definir a função enumerando-se diretamente as associações entre cada elemento do domínio e um elemento do contradomínio.

Exemplo 1

Seja N a função que associa um nome popular de uma espécie a seu nome científico.

ser humano	*Homo sapiens*
camundongo	*Mus musculus*
boi	*Bos primigenius*
vaca	*Bos primigenius*
⋮	⋮

Exemplo 1

Seja N a função que associa um nome popular de uma espécie a seu nome científico.

ser humano	*Homo sapiens*
camundongo	*Mus musculus*
boi	*Bos primigenius*
vaca	*Bos primigenius*
$\vdots$	$\vdots$

Domínio de N:

Contradomínio de N:

Exemplo 1

Seja N a função que associa um nome popular de uma espécie a seu nome científico.

ser humano	*Homo sapiens*
camundongo	*Mus musculus*
boi	*Bos primigenius*
vaca	*Bos primigenius*
$\vdots$	$\vdots$

Domínio de N: conjunto dos nomes populares de espécies

Contradomínio de N: conjunto dos nomes científicos de espécies

Exemplo 1

Seja N a função que associa um nome popular de uma espécie a seu nome científico.

ser humano	*Homo sapiens*
camundongo	*Mus musculus*
boi	*Bos primigenius*
vaca	*Bos primigenius*
$\vdots$	$\vdots$

Domínio de N: conjunto dos nomes populares de espécies

Contradomínio de N: conjunto dos nomes científicos de espécies

Exemplos de imagens de elementos no domínio:

Exemplo 1

Seja N a função que associa um nome popular de uma espécie a seu nome científico.

ser humano	*Homo sapiens*
camundongo	*Mus musculus*
boi	*Bos primigenius*
vaca	*Bos primigenius*
$\vdots$	$\vdots$

Domínio de N: conjunto dos nomes populares de espécies

Contradomínio de N: conjunto dos nomes científicos de espécies

Exemplos de imagens de elementos no domínio:
N(ser humano)

Exemplo 1

Seja N a função que associa um nome popular de uma espécie a seu nome científico.

ser humano	*Homo sapiens*
camundongo	*Mus musculus*
boi	*Bos primigenius*
vaca	*Bos primigenius*
$\vdots$	$\vdots$

Domínio de N: conjunto dos nomes populares de espécies

Contradomínio de N: conjunto dos nomes científicos de espécies

Exemplos de imagens de elementos no domínio:
$N(\text{ser humano}) = \textit{Homo sapiens}$

Exemplo 1

Seja N a função que associa um nome popular de uma espécie a seu nome científico.

ser humano	*Homo sapiens*
camundongo	*Mus musculus*
boi	*Bos primigenius*
vaca	*Bos primigenius*
$\vdots$	$\vdots$

Domínio de N: conjunto dos nomes populares de espécies

Contradomínio de N: conjunto dos nomes científicos de espécies

Exemplos de imagens de elementos no domínio:
N(ser humano) = *Homo sapiens*
N(boi)

Exemplo 1

Seja N a função que associa um nome popular de uma espécie a seu nome científico.

ser humano	*Homo sapiens*
camundongo	*Mus musculus*
boi	*Bos primigenius*
vaca	*Bos primigenius*
$\vdots$	$\vdots$

Domínio de N: conjunto dos nomes populares de espécies

Contradomínio de N: conjunto dos nomes científicos de espécies

Exemplos de imagens de elementos no domínio:
N(ser humano) = *Homo sapiens*
N(boi) = *Bos primigenius*

Exemplo 1

Seja N a função que associa um nome popular de uma espécie a seu nome científico.

ser humano	*Homo sapiens*
camundongo	*Mus musculus*
boi	*Bos primigenius*
vaca	*Bos primigenius*
$\vdots$	$\vdots$

Domínio de N: conjunto dos nomes populares de espécies

Contradomínio de N: conjunto dos nomes científicos de espécies

Exemplos de imagens de elementos no domínio:
N(ser humano) = *Homo sapiens*
N(boi) = *Bos primigenius*
N(vaca)

Exemplo 1

Seja N a função que associa um nome popular de uma espécie a seu nome científico.

ser humano	*Homo sapiens*
camundongo	*Mus musculus*
boi	*Bos primigenius*
vaca	*Bos primigenius*
$\vdots$	$\vdots$

Domínio de N: conjunto dos nomes populares de espécies

Contradomínio de N: conjunto dos nomes científicos de espécies

Exemplos de imagens de elementos no domínio:
N(ser humano) = *Homo sapiens*
N(boi) = *Bos primigenius*
N(vaca) = *Bos primigenius*

Definindo funções por enumeração

Outros exemplos:

- $f : \{1, 2, 3\} \to \{$ "a", "b" $\}$
  definida por $f(1) =$ "a", $f(2) =$ "a", $f(3) =$ "b".
- $m : \{$ "a", ..., "z" $\} \to \{$ símbolos válidos em código morse $\}$

a	• —	j	• — — —	s	• • •
b	— • • •	k	— • —	t	—
c	— • — •	l	— • —	u	• • —
d	— • •	m	— —	v	• • • —
e	•	n	— •	w	• — —
f	• • — •	o	— — —	x	— • • —
g	— — •	p	• — — •	y	— • — —
h	• • • •	q	— — • —	z	— — • •
i	• •	r	• — •		

Definindo funções por uma expressão

Se o domínio e a imagem de uma função são conjuntos numéricos, podemos definir a associação entre os conjuntos por meio de uma expressão.

Exemplos:

- $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, tal que $f(n) = \dfrac{1}{n}$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = x^2$
- $h : [-1; 1] \to \mathbb{R}$, tal que $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Definindo funções por uma expressão

Se o domínio e a imagem de uma função são conjuntos numéricos, podemos definir a associação entre os conjuntos por meio de uma expressão.

Exemplos:

- $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, tal que $f(n) = \dfrac{1}{n}$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = x^2$
- $h : [-1; 1] \to \mathbb{R}$, tal que $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Nos casos em que a função é descrita por uma expressão, existe uma notação compacta para descrevê-la. Dos exemplos anteriores:
$f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$

Definindo funções por uma expressão

Se o domínio e a imagem de uma função são conjuntos numéricos, podemos definir a associação entre os conjuntos por meio de uma expressão.

Exemplos:

- $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, tal que $f(n) = \dfrac{1}{n}$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = x^2$
- $h : [-1; 1] \to \mathbb{R}$, tal que $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Nos casos em que a função é descrita por uma expressão, existe uma notação compacta para descrevê-la. Dos exemplos anteriores:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^* &\to \mathbb{Q} \\ n &\mapsto f(n) = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Definindo funções por uma expressão

Se o domínio e a imagem de uma função são conjuntos numéricos, podemos definir a associação entre os conjuntos por meio de uma expressão.

Exemplos:

- $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, tal que $f(n) = \dfrac{1}{n}$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = x^2$
- $h : [-1; 1] \to \mathbb{R}$, tal que $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Nos casos em que a função é descrita por uma expressão, existe uma notação compacta para descrevê-la. Dos exemplos anteriores:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^* &\to \mathbb{Q} \\ n &\mapsto f(n) = \frac{1}{n} \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = x^2 \end{aligned}$$

Definindo funções por uma expressão

Se o domínio e a imagem de uma função são conjuntos numéricos, podemos definir a associação entre os conjuntos por meio de uma expressão.

Exemplos:

- $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, tal que $f(n) = \dfrac{1}{n}$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = x^2$
- $h : [-1; 1] \to \mathbb{R}$, tal que $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Nos casos em que a função é descrita por uma expressão, existe uma notação compacta para descrevê-la. Dos exemplos anteriores:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^* &\to \mathbb{Q} \\ n &\mapsto f(n) = \frac{1}{n} \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = x^2 \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} h : [-1; 1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto h(x) = \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

Funções e conjuntos

Seja $f : D \to C$. Já definimos:

- Dom $f = D$ (lê-se "o domínio de f é D")
- O contradomínio de f é C (não há notação)

Funções e conjuntos

Seja $f : D \to C$. Já definimos:

- Dom $f = D$ (lê-se "o domínio de f é D")
- O contradomínio de f é C (não há notação)

A partir desses conceitos, definimos os conjuntos:

- imagem de f: $\operatorname{Im} f = \{y \in C \mid y = f(x) \text{ para algum } x \in D\}$

Funções e conjuntos

Seja $f : D \to C$. Já definimos:

- Dom $f = D$ (lê-se "o domínio de f é D")
- O contradomínio de f é C (não há notação)

A partir desses conceitos, definimos os conjuntos:

- imagem de f: $\operatorname{Im} f = \{y \in C \mid y = f(x) \text{ para algum } x \in D\}$
- seja $X \subset D$ um conjunto; definimos a **imagem de X por f**, denotada $f(X)$, por:
  $f(X) = \{b \in C \mid b = f(a) \text{ para algum } a \in X\}$

Funções e conjuntos

Seja $f : D \to C$. Já definimos:

- Dom $f = D$ (lê-se "o domínio de f é D")
- O contradomínio de f é C (não há notação)

A partir desses conceitos, definimos os conjuntos:

- imagem de f: $\operatorname{Im} f = \{y \in C \mid y = f(x) \text{ para algum } x \in D\}$
- seja $X \subset D$ um conjunto; definimos a **imagem de X por f**, denotada $f(X)$, por:
  $f(X) = \{b \in C \mid b = f(a) \text{ para algum } a \in X\}$
- seja $Y \subset C$ um conjunto; definimos a **pré-imagem de Y por f**, denotada $f^{-1}(Y)$, por:
  $f^{-1}(Y) = \{a \in D \mid f(a) \in Y\}$

Funções e conjuntos

Seja $f : D \to C$. Já definimos:

- Dom $f = D$ (lê-se "o domínio de f é D")
- O contradomínio de f é C (não há notação)

A partir desses conceitos, definimos os conjuntos:

- imagem de f: $\operatorname{Im} f = \{y \in C \mid y = f(x) \text{ para algum } x \in D\}$
- seja $X \subset D$ um conjunto; definimos a **imagem de X por f**, denotada $f(X)$, por:
  $f(X) = \{b \in C \mid b = f(a) \text{ para algum } a \in X\}$
- seja $Y \subset C$ um conjunto; definimos a **pré-imagem de Y por f**, denotada $f^{-1}(Y)$, por:
  $f^{-1}(Y) = \{a \in D \mid f(a) \in Y\}$

Obs.: não confundir pré-imagem de um conjunto, $f^{-1}(Y)$, com a imagem pela função inversa, $f^{-1}(y)$; não há ambiguidade, pois Y é um conjunto, enquanto que y é um elemento.

Exemplo 2

Considere $f : \{1, 2, 3\} \to \{$ *"a", "b"* $\}$ *tal que* $f(1) =$ *"a"*, $f(2) =$ *"a"*, $f(3) =$ *"b"*.

- Dom f =
- Contradomínio de f =
- Im f =
- $f(\{1, 2\}) =$
- $f^{-1}(\{\text{"a"}\}) =$

Exemplo 2

Considere $f : \{1, 2, 3\} \to \{$ *"a", "b"* $\}$ *tal que* $f(1) =$ *"a"*, $f(2) =$ *"a"*, $f(3) =$ *"b"*.

- Dom $f = \{1, 2, 3\}$
- Contradomínio de $f =$
- Im $f =$
- $f(\{1, 2\}) =$
- $f^{-1}(\{\text{"a"}\}) =$

Exemplo 2

Considere $f : \{1, 2, 3\} \to \{$ *"a", "b"* $\}$ *tal que* $f(1) =$ *"a"*, $f(2) =$ *"a"*, $f(3) =$ *"b"*.

- Dom $f = \{1, 2, 3\}$
- Contradomínio de $f = \{$ "a", "b" $\}$
- Im $f =$
- $f(\{1, 2\}) =$
- $f^{-1}(\{\text{"a"}\}) =$

Exemplo 2

Considere $f : \{1, 2, 3\} \to \{$ *"a", "b"* $\}$ *tal que* $f(1) =$ *"a"*, $f(2) =$ *"a"*, $f(3) =$ *"b"*.

- Dom $f = \{1, 2, 3\}$
- Contradomínio de $f = \{$ "a", "b" $\}$
- Im $f = \{$ "a", "b" $\}$
- $f(\{1, 2\}) =$
- $f^{-1}(\{\text{"a"}\}) =$

Exemplo 2

Considere $f : \{1, 2, 3\} \to \{$ *"a", "b"* $\}$ *tal que* $f(1) =$ *"a"*, $f(2) =$ *"a"*, $f(3) =$ *"b"*.

- Dom $f = \{1, 2, 3\}$
- Contradomínio de $f = \{$ "a", "b" $\}$
- Im $f = \{$ "a", "b" $\}$
- $f(\{1, 2\}) = \{$"a"$\}$
- $f^{-1}(\{$"a"$\}) =$

Exemplo 2

Considere $f : \{1, 2, 3\} \to \{$ *"a", "b"* $\}$ *tal que* $f(1) =$ *"a"*, $f(2) =$ *"a"*, $f(3) =$ *"b"*.

- Dom $f = \{1, 2, 3\}$
- Contradomínio de $f = \{$ "a", "b" $\}$
- Im $f = \{$ "a", "b" $\}$
- $f(\{1, 2\}) = \{$"a"$\}$
- $f^{-1}(\{$"a"$\}) = \{1, 2\}$

Funções e conjuntos: exemplos

Exemplo 3

Seja $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$

- Dom f =
- Contradomínio de f =
- Im f =
- $f((-1;1))$ =
- $f^{-1}(\{2\})$ =

Funções e conjuntos: exemplos

Exemplo 3

Seja $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$

- Dom $f = \mathbb{R}$
- Contradomínio de $f =$
- Im $f =$
- $f((-1;1)) =$
- $f^{-1}(\{2\}) =$

Funções e conjuntos: exemplos

Exemplo 3

Seja $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$

- Dom $f = \mathbb{R}$
- Contradomínio de $f = \mathbb{R}$
- Im $f =$
- $f((-1;1)) =$
- $f^{-1}(\{2\}) =$

Funções e conjuntos: exemplos

Exemplo 3

Seja $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$

- Dom $f = \mathbb{R}$
- Contradomínio de $f = \mathbb{R}$
- Im $f = \{y \in \mathbb{R} \mid y = x^2$ **para algum** $x \in \mathbb{R}\}$
- $f((-1;1)) =$
- $f^{-1}(\{2\}) =$

Exemplo 3

Seja $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$

- Dom $f = \mathbb{R}$
- Contradomínio de $f = \mathbb{R}$
- Im $f = \{y \in \mathbb{R} \mid y = x^2$ **para algum** $x \in \mathbb{R}\} = [0; +\infty)$
- $f((-1; 1)) =$
- $f^{-1}(\{2\}) =$

Exemplo 3

Seja $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$

- Dom $f = \mathbb{R}$
- Contradomínio de $f = \mathbb{R}$
- Im $f = \{y \in \mathbb{R} \mid y = x^2$ **para algum** $x \in \mathbb{R}\} = [0; +\infty)$
- $f((-1; 1)) = [0; 1)$
- $f^{-1}(\{2\}) =$

Exemplo 3

Seja $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$

- Dom $f = \mathbb{R}$
- Contradomínio de $f = \mathbb{R}$
- Im $f = \{y \in \mathbb{R} \mid y = x^2$ **para algum** $x \in \mathbb{R}\} = [0; +\infty)$
- $f((-1; 1)) = [0; 1)$
- $f^{-1}(\{2\}) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

Classificação de funções

Pela definição de $f : D \to C$, temos que

- $\operatorname{Im} f \subset C$
- cada elemento $x \in D$ possui uma única imagem $f(x) \in C$,

Classificação de funções

Pela definição de $f : D \to C$, temos que

- $\operatorname{Im} f \subset C$
- cada elemento $x \in D$ possui uma única imagem $f(x) \in C$,

mas, apenas com a definição:

- **não é garantido que** $\operatorname{Im} f = C$

Classificação de funções

Pela definição de $f : D \to C$, temos que

- $\operatorname{Im} f \subset C$
- cada elemento $x \in D$ possui uma única imagem $f(x) \in C$,

mas, apenas com a definição:

- **não é garantido que** $\operatorname{Im} f = C$
- **não é garantido que** cada elemento da imagem possua apenas um único elemento em sua pré-imagem.

Classificação de funções

Pela definição de $f : D \to C$, temos que

- $\operatorname{Im} f \subset C$
- cada elemento $x \in D$ possui uma única imagem $f(x) \in C$,

mas, apenas com a definição:

- **não é garantido que** $\operatorname{Im} f = C$
- **não é garantido que** cada elemento da imagem possua apenas um único elemento em sua pré-imagem.

Se uma função satisfaz alguma das propriedades acima, damos uma classificação especial para ela.

Classificação de funções

Definição

Uma função $f : D \to C$ é dita ***sobrejetora*** *se $\operatorname{Im} f = C$.*

Classificação de funções

Definição

Uma função $f : D \to C$ é dita ***sobrejetora*** *se $\operatorname{Im} f = C$.*

Definição

Uma função $f : D \to C$ é dita ***injetora*** *se quaisquer par de elementos <u>distintos</u> $x_1, x_2 \in D$ corresponde a um par de elementos <u>distintos</u> $y_1, y_2 \in C$.*

Classificação de funções

Definição

Uma função $f : D \to C$ é dita ***sobrejetora*** *se $\operatorname{Im} f = C$.*

Definição

Uma função $f : D \to C$ é dita ***injetora*** *se quaisquer par de elementos* <u>*distintos*</u> *$x_1, x_2 \in D$ corresponde a um par de elementos* <u>*distintos*</u> *$y_1, y_2 \in C$.*

Ou seja, f é injetora caso $x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$.

Classificação de funções: exemplos

Considere:

	injetora	sobrejetora

Classificação de funções: exemplos

Considere:

- $f : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}, \text{“c”}\}$ tal que $f(1) = \text{“a”}$, $f(2) = \text{“a”}$, $f(3) = \text{“b”}$.

	injetora	sobrejetora
f		

Classificação de funções: exemplos

Considere:

- $f : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}, \text{“c”}\}$ tal que $f(1) = \text{“a”}$, $f(2) = \text{“a”}$, $f(3) = \text{“b”}$.

	injetora	sobrejetora
f	não	

f não é injetora pois $f(1) = f(2)$

Classificação de funções: exemplos

Considere:

- $f : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}, \text{“c”}\}$ tal que $f(1) = \text{“a”}$, $f(2) = \text{“a”}$, $f(3) = \text{“b”}$.

	injetora	sobrejetora
f	não	não

f não é injetora pois $f(1) = f(2)$

f não é sobrejetora pois c não possui pré-imagem

Classificação de funções: exemplos

Considere:

- $f : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}, \text{“c”}\}$ tal que $f(1) = \text{“a”}$, $f(2) = \text{“a”}$, $f(3) = \text{“b”}$.
- $F : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}\}$ tal que $F(1) = \text{“a”}$, $F(2) = \text{“a”}$, $F(3) = \text{“b”}$.

	injetora	sobrejetora
f	não	não
F		

Classificação de funções: exemplos

Considere:

- $f : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}, \text{“c”}\}$ tal que $f(1) = \text{“a”}$, $f(2) = \text{“a”}$, $f(3) = \text{“b”}$.
- $F : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}\}$ tal que $F(1) = \text{“a”}$, $F(2) = \text{“a”}$, $F(3) = \text{“b”}$.

	injetora	sobrejetora
f	não	não
F	não	

F não é injetora pois $F(1) = F(2)$

Classificação de funções: exemplos

Considere:

- $f : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}, \text{“c”}\}$ tal que $f(1) = \text{“a”}$, $f(2) = \text{“a”}$, $f(3) = \text{“b”}$.
- $F : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}\}$ tal que $F(1) = \text{“a”}$, $F(2) = \text{“a”}$, $F(3) = \text{“b”}$.

	injetora	sobrejetora
f	não	não
F	não	**sim**

F não é injetora pois $F(1) = F(2)$

F **é sobrejetora** pois todo elemento no domínio possui pré-imagem

Classificação de funções: exemplos

Considere:

- $f : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}, \text{“c”}\}$ tal que $f(1) = \text{“a”}$, $f(2) = \text{“a”}$, $f(3) = \text{“b”}$.
- $F : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}\}$ tal que $F(1) = \text{“a”}$, $F(2) = \text{“a”}$, $F(3) = \text{“b”}$.
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto g(x) = x^2$

	injetora	sobrejetora
f	não	não
F	não	**sim**
g		

Classificação de funções: exemplos

Considere:

- $f : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}, \text{“c”}\}$ tal que $f(1) = \text{“a”}$, $f(2) = \text{“a”}$, $f(3) = \text{“b”}$.
- $F : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}\}$ tal que $F(1) = \text{“a”}$, $F(2) = \text{“a”}$, $F(3) = \text{“b”}$.
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto g(x) = x^2$

	injetora	sobrejetora
f	não	não
F	não	**sim**
g	não	

g não é injetora pois, se $a > 0$, $-a \neq a$ mas $g(-a) = g(a) = a^2$

Classificação de funções: exemplos

Considere:

- $f : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}, \text{“c”}\}$ tal que $f(1) = \text{“a”}$, $f(2) = \text{“a”}$, $f(3) = \text{“b”}$.
- $F : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}\}$ tal que $F(1) = \text{“a”}$, $F(2) = \text{“a”}$, $F(3) = \text{“b”}$.
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto g(x) = x^2$

	injetora	sobrejetora
f	não	não
F	não	**sim**
g	não	não

g não é injetora pois, se $a > 0$, $-a \neq a$ mas $g(-a) = g(a) = a^2$

g não é sobrejetora pois nenhum número negativo está na imagem de g

Classificação de funções: exemplos

Considere:

- $f : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}, \text{“c”}\}$ tal que $f(1) = \text{“a”}$, $f(2) = \text{“a”}$, $f(3) = \text{“b”}$.
- $F : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}\}$ tal que $F(1) = \text{“a”}$, $F(2) = \text{“a”}$, $F(3) = \text{“b”}$.
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto g(x) = x^2$
- $G : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto G(x) = x^2$

	injetora	sobrejetora
f	não	não
F	não	**sim**
g	não	não
G		

Classificação de funções: exemplos

Considere:

- $f : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}, \text{“c”}\}$ tal que $f(1) = \text{“a”}$, $f(2) = \text{“a”}$, $f(3) = \text{“b”}$.
- $F : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}\}$ tal que $F(1) = \text{“a”}$, $F(2) = \text{“a”}$, $F(3) = \text{“b”}$.
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto g(x) = x^2$
- $G : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto G(x) = x^2$

	injetora	sobrejetora
f	não	não
F	não	**sim**
g	não	não
G	**sim**	

G **é injetora** pois, se $a \neq b$ são ambos positivos, então $a^2 \neq b^2$

Classificação de funções: exemplos

Considere:

- $f : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}, \text{“c”}\}$ tal que $f(1) = \text{“a”}$, $f(2) = \text{“a”}$, $f(3) = \text{“b”}$.
- $F : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}\}$ tal que $F(1) = \text{“a”}$, $F(2) = \text{“a”}$, $F(3) = \text{“b”}$.
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto g(x) = x^2$
- $G : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto G(x) = x^2$

	injetora	sobrejetora
f	não	não
F	não	**sim**
g	não	não
G	**sim**	não

G **é injetora** pois, se $a \neq b$ são ambos positivos, então $a^2 \neq b^2$

G não é sobrejetora pois nenhum número negativo está na imagem de G

Classificação de funções: exemplos

Considere:

- $f : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}, \text{“c”}\}$ tal que $f(1) = \text{“a”}$, $f(2) = \text{“a”}$, $f(3) = \text{“b”}$.
- $F : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}\}$ tal que $F(1) = \text{“a”}$, $F(2) = \text{“a”}$, $F(3) = \text{“b”}$.
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto g(x) = x^2$
- $G : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto G(x) = x^2$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto h(x) = x^3$

	injetora	sobrejetora
f	não	não
F	não	**sim**
g	não	não
G	**sim**	não
h		

Classificação de funções: exemplos

Considere:

- $f : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}, \text{“c”}\}$ tal que $f(1) = \text{“a”}$, $f(2) = \text{“a”}$, $f(3) = \text{“b”}$.
- $F : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}\}$ tal que $F(1) = \text{“a”}$, $F(2) = \text{“a”}$, $F(3) = \text{“b”}$.
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto g(x) = x^2$
- $G : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto G(x) = x^2$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto h(x) = x^3$

	injetora	sobrejetora
f	não	não
F	não	**sim**
g	não	não
G	**sim**	não
h	**sim**	

h **é injetora** pois, se $a \neq b$ são reais distintos, então $a^3 \neq b^3$

Classificação de funções: exemplos

Considere:

- $f : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}, \text{“c”}\}$ tal que $f(1) = \text{“a”}$, $f(2) = \text{“a”}$, $f(3) = \text{“b”}$.
- $F : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}\}$ tal que $F(1) = \text{“a”}$, $F(2) = \text{“a”}$, $F(3) = \text{“b”}$.
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto g(x) = x^2$
- $G : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto G(x) = x^2$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto h(x) = x^3$

	injetora	sobrejetora
f	não	não
F	não	**sim**
g	não	não
G	**sim**	não
h	**sim**	**sim**

h **é injetora** pois, se $a \neq b$ são reais distintos, então $a^3 \neq b^3$

h **é sobrejetora** pois qualquer número no contradomínio possui pré-imagem ($\sqrt[3]{x}$ sempre está definido nos reais)

Funções bijetoras

Definição

Dizemos que uma função é ***bijetora*** *se ela é, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora.*

Funções bijetoras

Definição

Dizemos que uma função é ***bijetora*** *se ela é, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora.*

Outros nomes comuns: função bijetiva, função biunívoca, bijeção.

Funções bijetoras

Definição

*Dizemos que uma função é **bijetora** se ela é, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora.*

Outros nomes comuns: função bijetiva, função biunívoca, bijeção.

Exemplos de funções bijetoras:

- $f : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}, \text{“c”}\}$ tal que $f(1) = \text{“a”}$, $f(2) = \text{“c”}$, $f(3) = \text{“b”}$.

Funções bijetoras

Definição

*Dizemos que uma função é **bijetora** se ela é, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora.*

Outros nomes comuns: função bijetiva, função biunívoca, bijeção.

Exemplos de funções bijetoras:

- $f : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}, \text{“c”}\}$ tal que $f(1) = \text{“a”}$, $f(2) = \text{“c”}$, $f(3) = \text{“b”}$.
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^3$

Funções bijetoras

Definição

Dizemos que uma função é ***bijetora*** *se ela é, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora.*

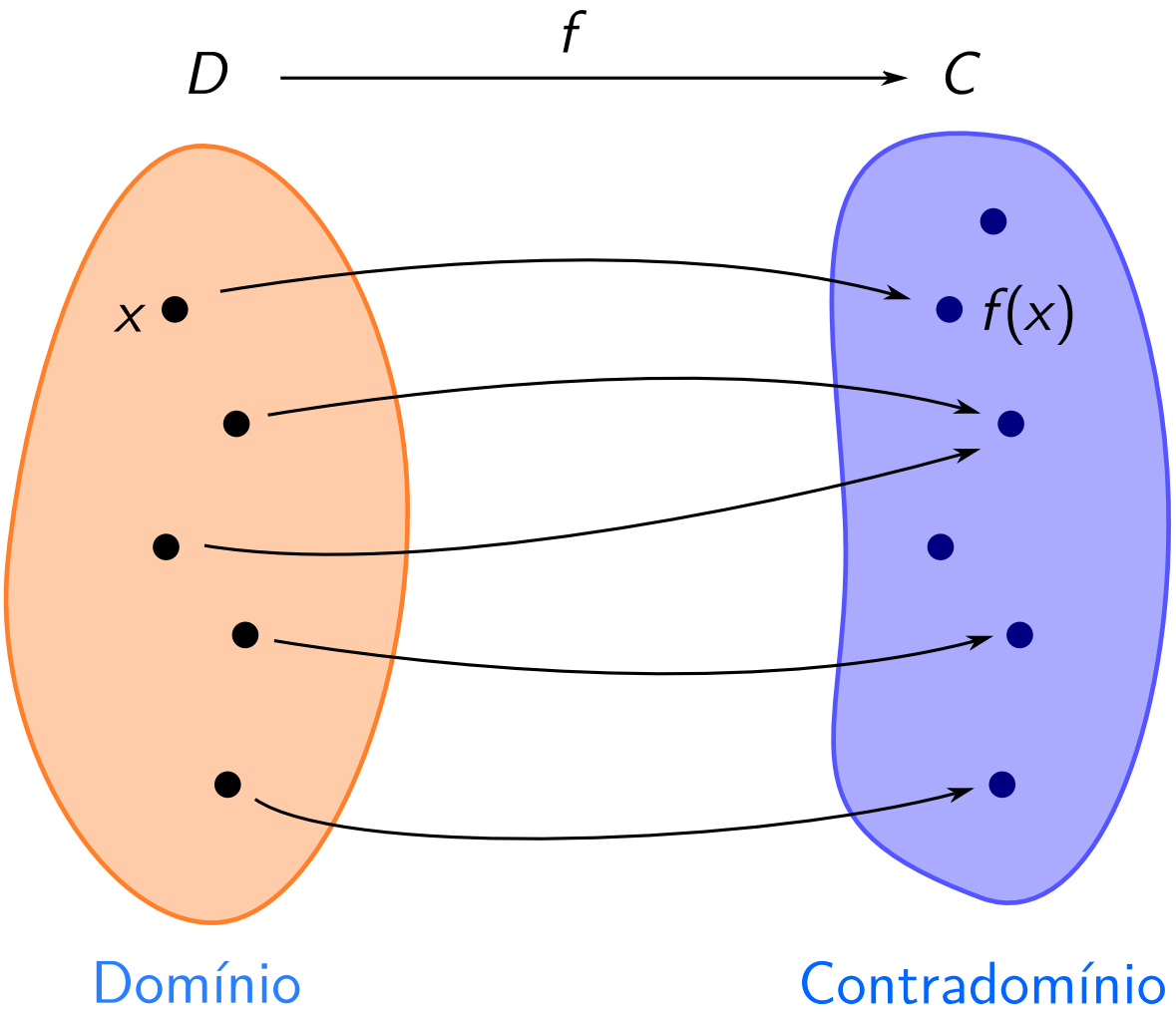
Outros nomes comuns: função bijetiva, função biunívoca, bijeção.

Exemplos de funções bijetoras:

- $f : \{1, 2, 3\} \to \{\text{“a”}, \text{“b”}, \text{“c”}\}$ tal que $f(1) = \text{“a”}$, $f(2) = \text{“c”}$, $f(3) = \text{“b”}$.
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^3$
- $g : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ tal que $g(x) = x^2$

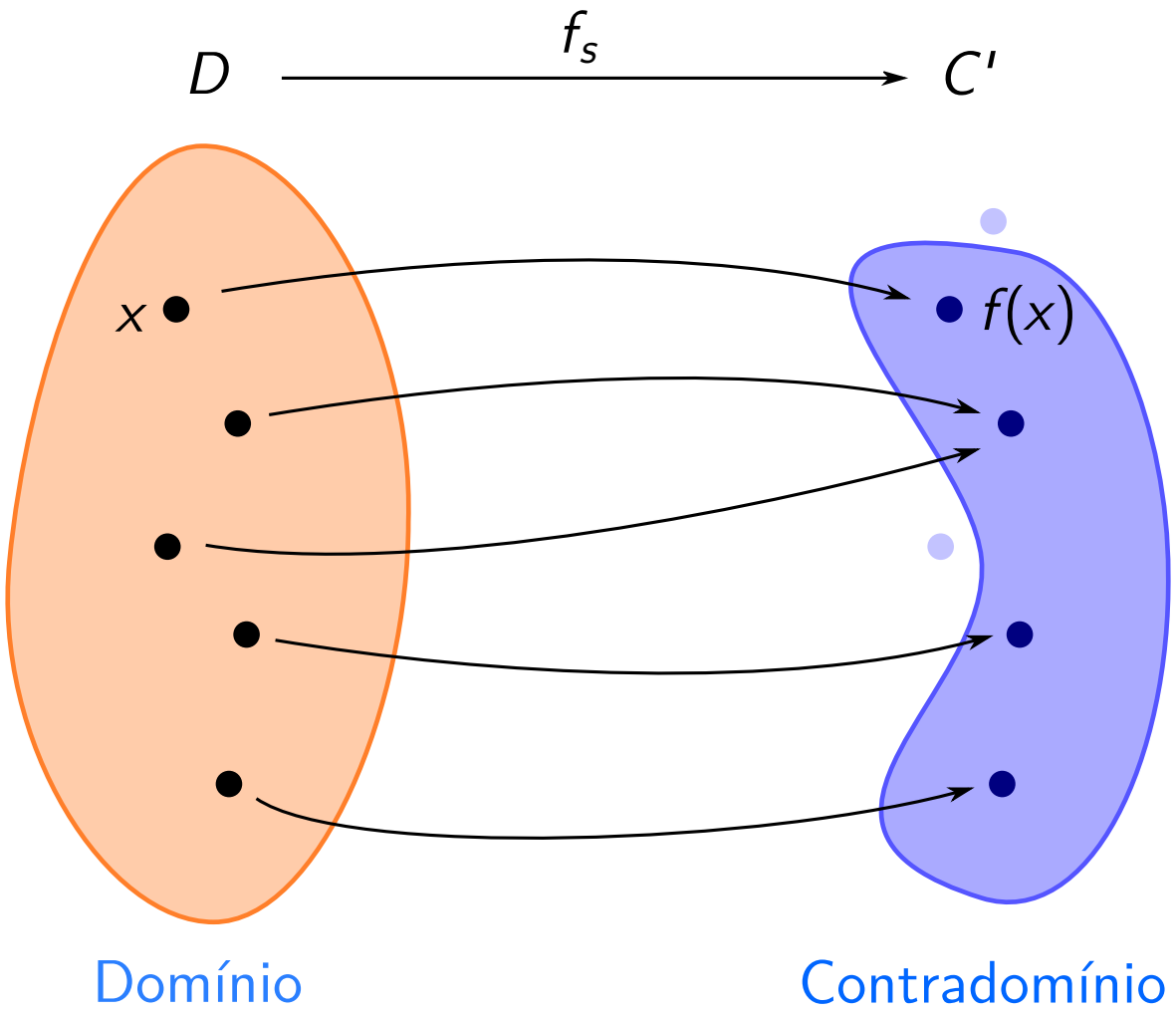
Visualização de funções usando Diagramas de Venn

Considere uma função $f : D \to C$ que não é nem injetora, nem sobrejetora.



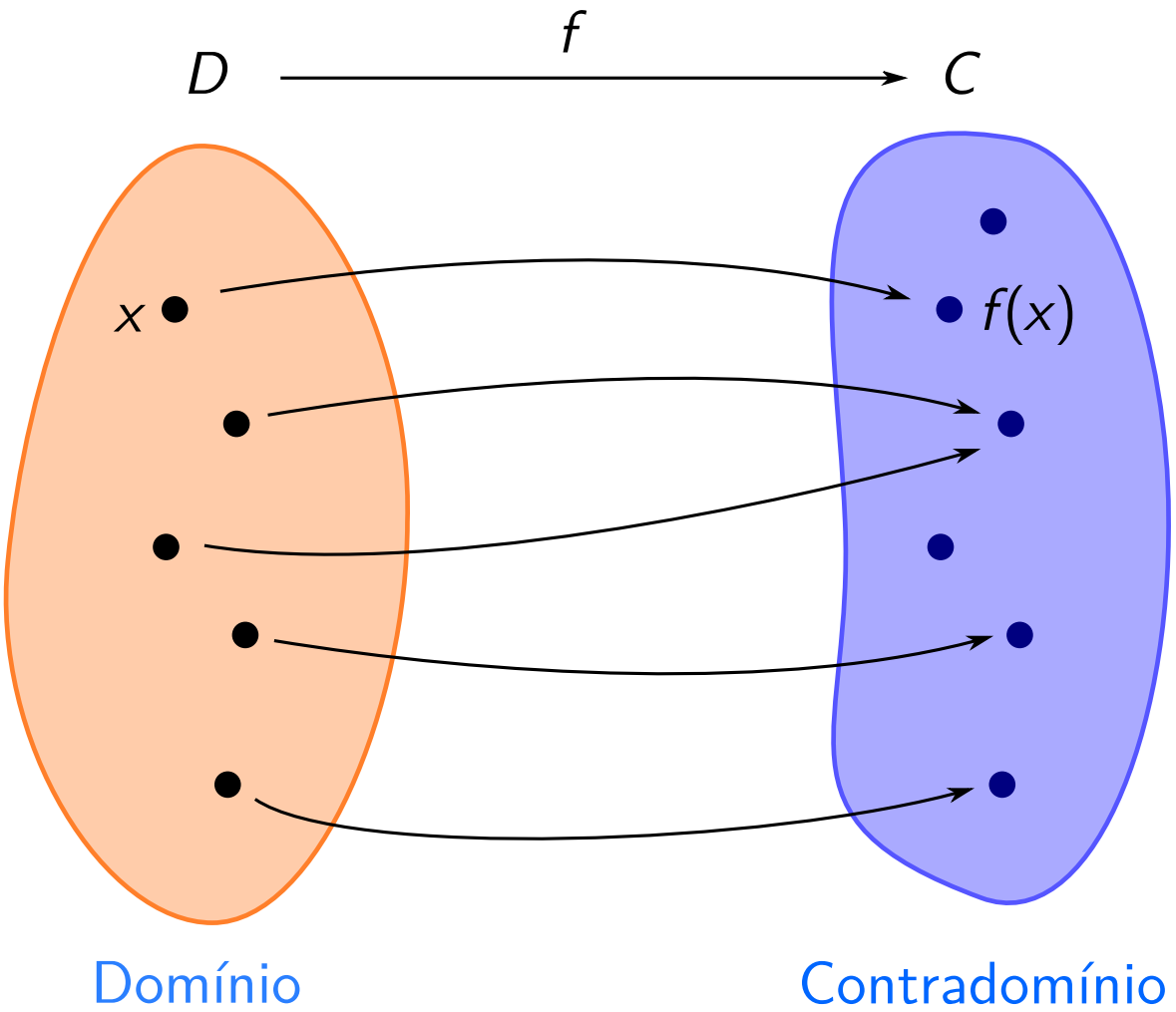
Visualização de funções usando Diagramas de Venn

Podemos restringir o contradomínio de f, criando uma função $f_s : D \to C'$ sobrejetora.



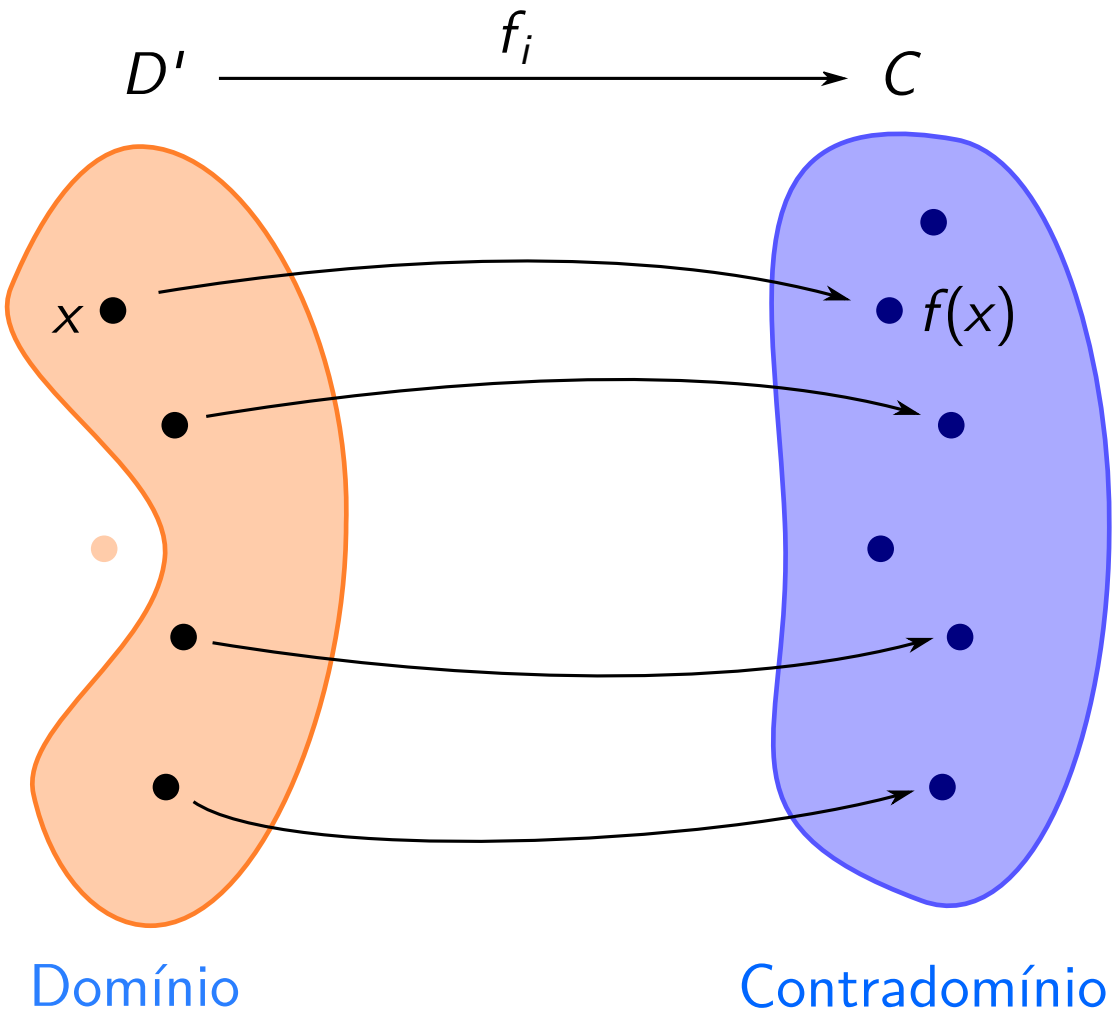
Visualização de funções usando Diagramas de Venn

Considere uma função $f : D \to C$ que não é nem injetora, nem sobrejetora.



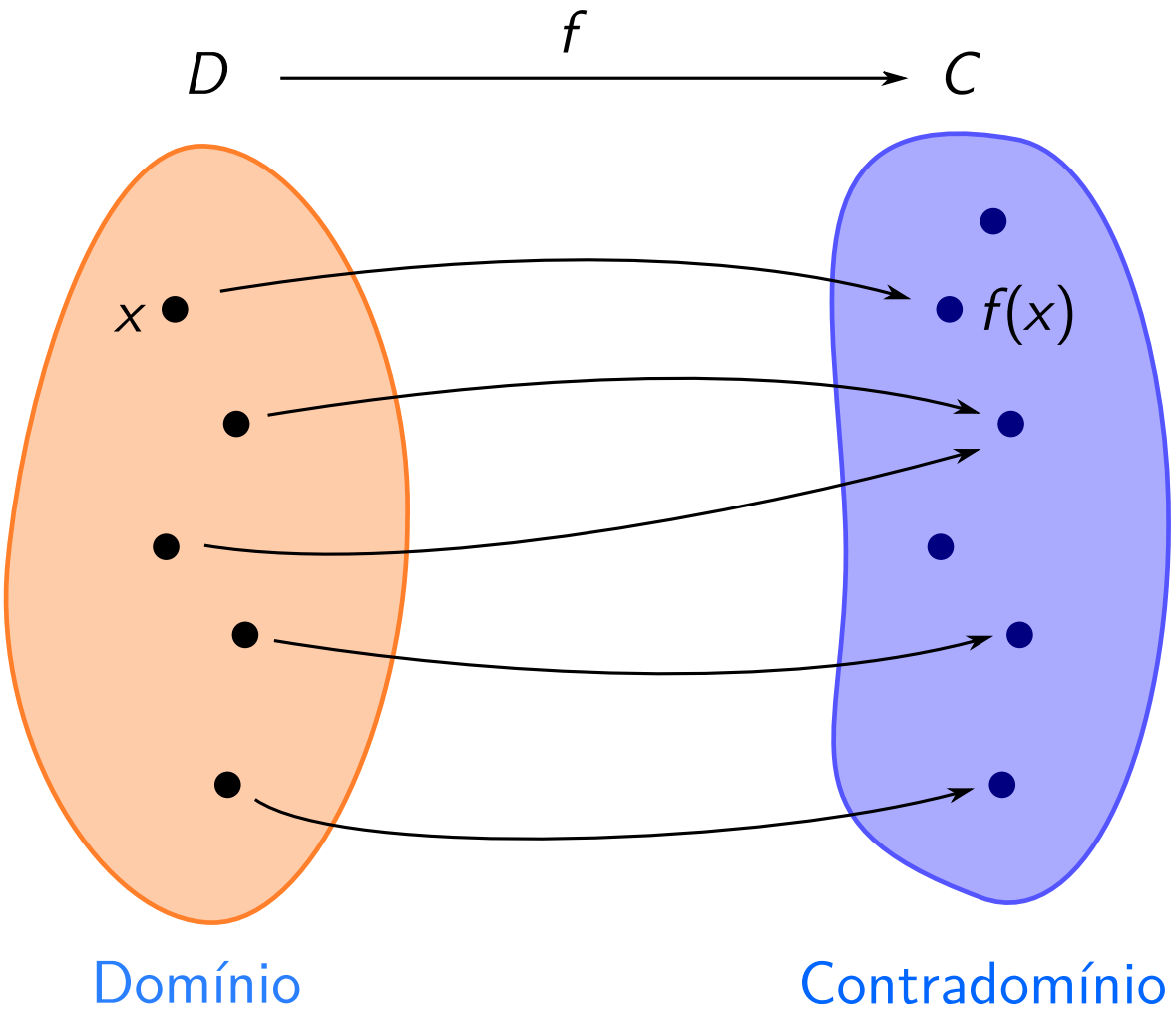
Visualização de funções usando Diagramas de Venn

Podemos restringir o domínio de f, criando uma função $f_i : D' \to C$ injetora.



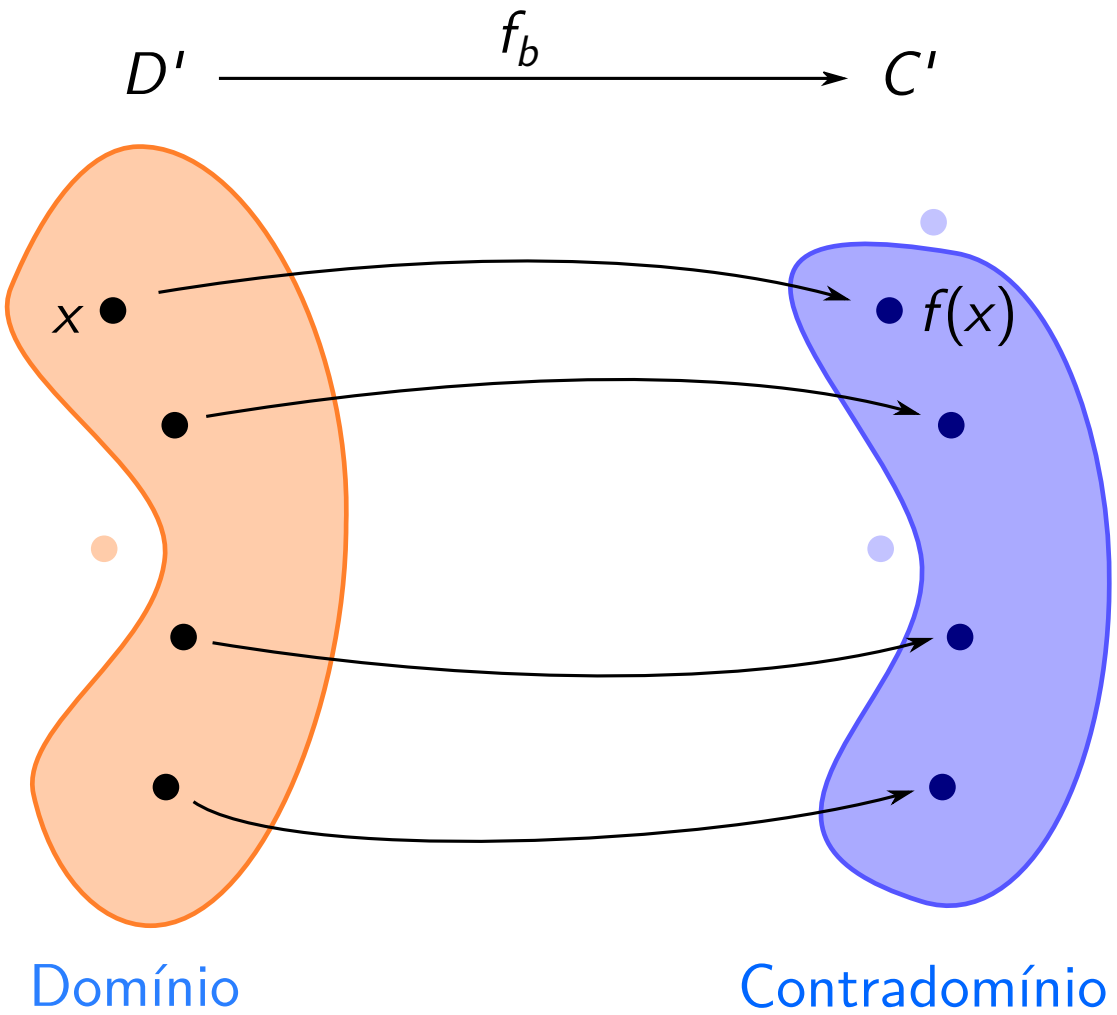
Visualização de funções usando Diagramas de Venn

Considere uma função $f : D \to C$ que não é nem injetora, nem sobrejetora.



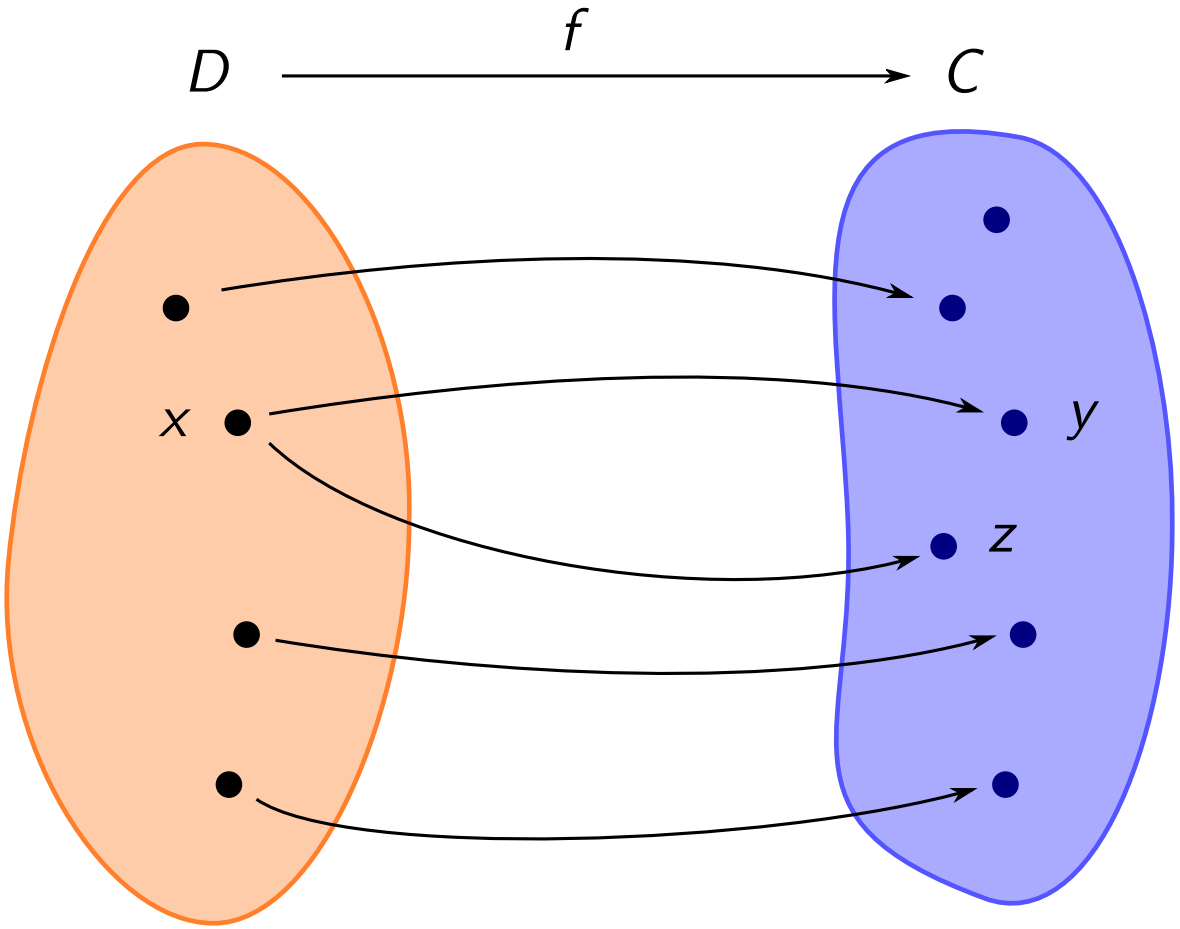
Visualização de funções usando Diagramas de Venn

Podemos restringir o domínio e contradomínio de f, criando uma função $f_b : D' \to C'$ bijetora.



Nem toda relação é uma função

Observe que a relação $f : D \to C$ abaixo **não é** uma função, pois o elemento $x \in D$ está associado a mais de um elemento em C.

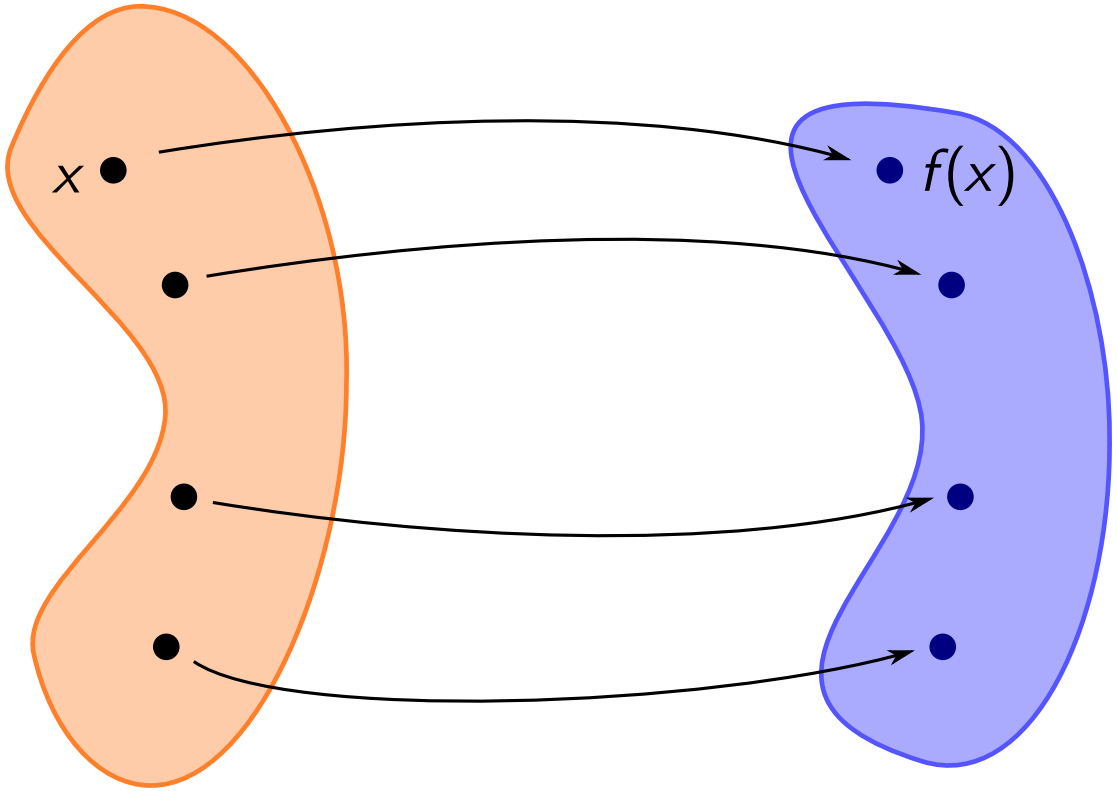


Para mais informações sobre relações em geral, leia o Cap. 6.

Função inversa

Seja $f : A \to B$ uma bijeção.

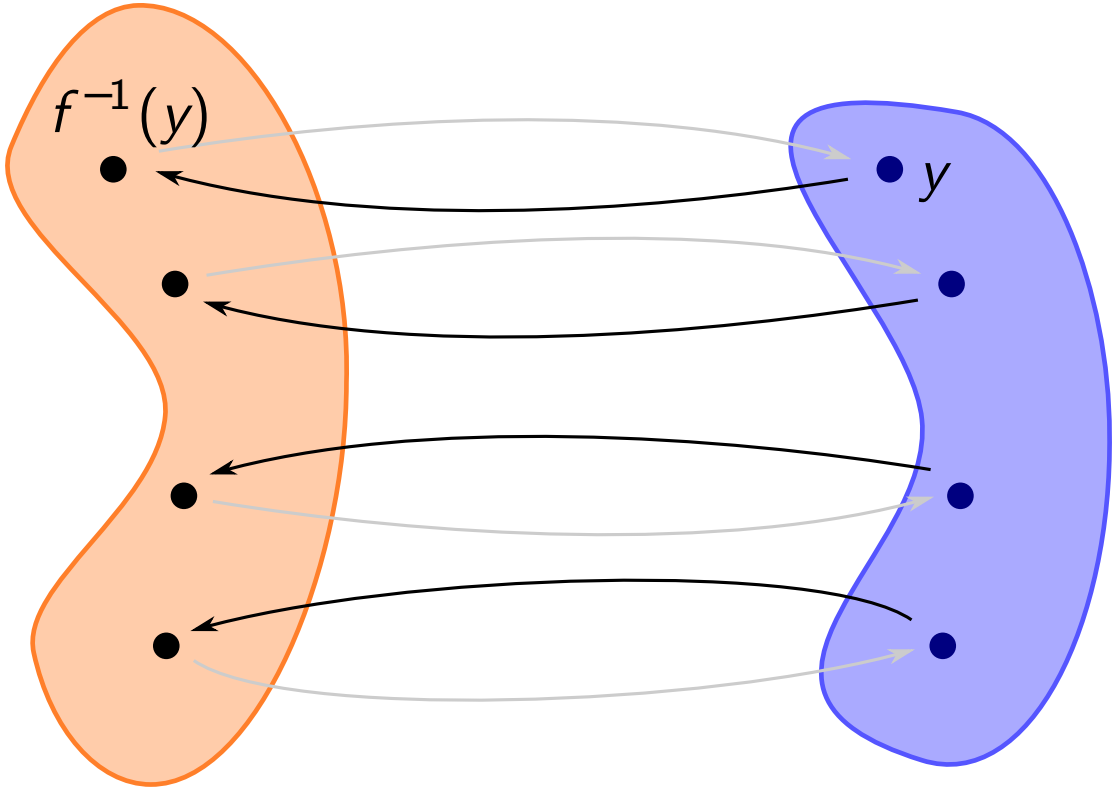
$$A \xrightarrow{\quad f \quad} B$$



Função inversa

Seja $f : A \to B$ uma bijeção. Podemos definir $f^{-1} : B \to A$ tal que $f^{-1}(y) = x$ se $f(x) = y$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$



Função inversa: exemplos

Exercício 1

Seja

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = 2x + 1$$

A função f é bijetora? Se sim, determine a função inversa.

Função inversa: exemplos

Exercício 1

Seja

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = 2x + 1$$

A função f é bijetora? Se sim, determine a função inversa.

Demonstração de que é injetora: Sejam x_1, x_2 no domínio de f tais que:

$$x_1 \neq x_2$$

Função inversa: exemplos

Exercício 1

Seja

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = 2x + 1$$

A função f é bijetora? Se sim, determine a função inversa.

Demonstração de que é injetora: Sejam x_1, x_2 no domínio de f tais que:

$$x_1 \neq x_2$$
$$2x_1 \neq 2x_2$$

Função inversa: exemplos

Exercício 1

Seja

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = 2x + 1$$

A função f é bijetora? Se sim, determine a função inversa.

Demonstração de que é injetora: Sejam x_1, x_2 no domínio de f tais que:

$$x_1 \neq x_2$$
$$2x_1 \neq 2x_2$$
$$2x_1 + 1 \neq 2x_2 + 1$$

Função inversa: exemplos

Exercício 1

Seja

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = 2x + 1$$

A função f é bijetora? Se sim, determine a função inversa.

Demonstração de que é injetora: Sejam x_1, x_2 no domínio de f tais que:

$$x_1 \neq x_2$$
$$2x_1 \neq 2x_2$$
$$2x_1 + 1 \neq 2x_2 + 1$$
$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

Função inversa: exemplos

Exercício 1

Seja

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = 2x + 1$$

A função f é bijetora? Se sim, determine a função inversa.

Demonstração de que é injetora: Sejam x_1, x_2 no domínio de f tais que:

$$\begin{aligned} x_1 &\neq x_2 \\ 2x_1 &\neq 2x_2 \\ 2x_1 + 1 &\neq 2x_2 + 1 \\ f(x_1) &\neq f(x_2) \end{aligned}$$

Demonstração de que é sobrejetora: Seja y no contradomínio de f; demonstraremos que há um elemento x no domínio de f tal que $f(x) = y$.

continua. . .

Tome y no contradomínio de f, ou seja, $y \in \mathbb{R}$;

Tome y no contradomínio de f, ou seja, $y \in \mathbb{R}$; como y é real, o número $y - 1$ também é.

Tome y no contradomínio de f, ou seja, $y \in \mathbb{R}$; como y é real, o número $y - 1$ também é. Da mesma forma, $\dfrac{y-1}{2}$ também é.

Tome y no contradomínio de f, ou seja, $y \in \mathbb{R}$; como y é real, o número $y - 1$ também é. Da mesma forma, $\dfrac{y-1}{2}$ também é.

Defina $x = \dfrac{y-1}{2}$, e verifique que

$$f(x) =$$

Tome y no contradomínio de f, ou seja, $y \in \mathbb{R}$; como y é real, o número $y - 1$ também é. Da mesma forma, $\dfrac{y-1}{2}$ também é.

Defina $x = \dfrac{y-1}{2}$, e verifique que

$$f(x) = 2x + 1 =$$

Tome y no contradomínio de f, ou seja, $y \in \mathbb{R}$; como y é real, o número $y - 1$ também é. Da mesma forma, $\dfrac{y-1}{2}$ também é.

Defina $x = \dfrac{y-1}{2}$, e verifique que

$$f(x) = 2x + 1 = 2\frac{y-1}{2} + 1 =$$

Tome y no contradomínio de f, ou seja, $y \in \mathbb{R}$; como y é real, o número $y - 1$ também é. Da mesma forma, $\dfrac{y-1}{2}$ também é.

Defina $x = \dfrac{y-1}{2}$, e verifique que

$$f(x) = 2x + 1 = 2\frac{y-1}{2} + 1 = y$$

Tome y no contradomínio de f, ou seja, $y \in \mathbb{R}$; como y é real, o número $y - 1$ também é. Da mesma forma, $\dfrac{y-1}{2}$ também é.

Defina $x = \dfrac{y-1}{2}$, e verifique que

$$f(x) = 2x + 1 = 2\frac{y-1}{2} + 1 = y$$

Logo qualquer y no contradomínio de f possui pré-imagem no domínio de f, ou seja, f é sobrejetora.

Tome y no contradomínio de f, ou seja, $y \in \mathbb{R}$; como y é real, o número $y - 1$ também é. Da mesma forma, $\dfrac{y-1}{2}$ também é.

Defina $x = \dfrac{y-1}{2}$, e verifique que

$$f(x) = 2x + 1 = 2\frac{y-1}{2} + 1 = y$$

Logo qualquer y no contradomínio de f possui pré-imagem no domínio de f, ou seja, f é sobrejetora.

Como f também é injetora, temos que f é bijetora.

continua. . .

Cálculo da função inversa: Dado $y \in \operatorname{Im} f$, queremos encontrar x no domínio tal que $2x + 1 = y$.

Cálculo da função inversa: Dado $y \in \operatorname{Im} f$, queremos encontrar x no domínio tal que $2x + 1 = y$.

Para fazer isso, basta obter uma expressão para x que dependa de y, ou seja, isolar x:

Cálculo da função inversa: Dado $y \in \operatorname{Im} f$, queremos encontrar x no domínio tal que $2x + 1 = y$.

Para fazer isso, basta obter uma expressão para x que dependa de y, ou seja, isolar x:

$$2x + 1 = y$$

Cálculo da função inversa: Dado $y \in \operatorname{Im} f$, queremos encontrar x no domínio tal que $2x + 1 = y$.

Para fazer isso, basta obter uma expressão para x que dependa de y, ou seja, isolar x:

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= y \\ 2x &= y - 1 \end{aligned}$$

Cálculo da função inversa: Dado $y \in \operatorname{Im} f$, queremos encontrar x no domínio tal que $2x + 1 = y$.

Para fazer isso, basta obter uma expressão para x que dependa de y, ou seja, isolar x:

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= y \\ 2x &= y - 1 \\ x &= \frac{y-1}{2} \end{aligned}$$

Cálculo da função inversa: Dado $y \in \operatorname{Im} f$, queremos encontrar x no domínio tal que $2x + 1 = y$.

Para fazer isso, basta obter uma expressão para x que dependa de y, ou seja, isolar x:

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= y \\ 2x &= y - 1 \\ x &= \frac{y-1}{2} \end{aligned}$$

Logo $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$. ■

Função inversa: exemplos

Exercício 2

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x^2$. *Restrinja o domínio e o contradomínio de* f *de maneira a obter uma bijeção.*

Função inversa: exemplos

Exercício 2

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. Restrinja o domínio e o contradomínio de f de maneira a obter uma bijeção.

Queremos encontrar $g : D \to C$ tal que $g(x) = f(x)$, com $D \subsetneq \mathbb{R}$ e $C \subsetneq \mathbb{R}$ de tal forma que g seja uma bijeção.

Função inversa: exemplos

Exercício 2

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. Restrinja o domínio e o contradomínio de f de maneira a obter uma bijeção.

Queremos encontrar $g : D \to C$ tal que $g(x) = f(x)$, com $D \subsetneq \mathbb{R}$ e $C \subsetneq \mathbb{R}$ de tal forma que g seja uma bijeção.

Observe que $\operatorname{Im} f = [0; +\infty)$, portanto tomaremos $C = [0; +\infty)$ para que g seja sobrejetora.

Função inversa: exemplos

Exercício 2

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. Restrinja o domínio e o contradomínio de f de maneira a obter uma bijeção.

Queremos encontrar $g : D \to C$ tal que $g(x) = f(x)$, com $D \subsetneq \mathbb{R}$ e $C \subsetneq \mathbb{R}$ de tal forma que g seja uma bijeção.

Observe que $\operatorname{Im} f = [0; +\infty)$, portanto tomaremos $C = [0; +\infty)$ para que g seja sobrejetora.

Para que g seja injetora, note que cada número negativo $-a$ possui um número positivo distinto a tal que $f(-a) = f(a) = a^2$.

Função inversa: exemplos

Exercício 2

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. Restrinja o domínio e o contradomínio de f de maneira a obter uma bijeção.

Queremos encontrar $g : D \to C$ tal que $g(x) = f(x)$, com $D \subsetneq \mathbb{R}$ e $C \subsetneq \mathbb{R}$ de tal forma que g seja uma bijeção.

Observe que $\operatorname{Im} f = [0; +\infty)$, portanto tomaremos $C = [0; +\infty)$ para que g seja sobrejetora.

Para que g seja injetora, note que cada número negativo $-a$ possui um número positivo distinto a tal que $f(-a) = f(a) = a^2$.

No domínio $D = [0; +\infty)$, a função g é injetora.

Função inversa: exemplos

Exercício 2

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. Restrinja o domínio e o contradomínio de f de maneira a obter uma bijeção.

Queremos encontrar $g : D \to C$ tal que $g(x) = f(x)$, com $D \subsetneq \mathbb{R}$ e $C \subsetneq \mathbb{R}$ de tal forma que g seja uma bijeção.

Observe que $\operatorname{Im} f = [0; +\infty)$, portanto tomaremos $C = [0; +\infty)$ para que g seja sobrejetora.

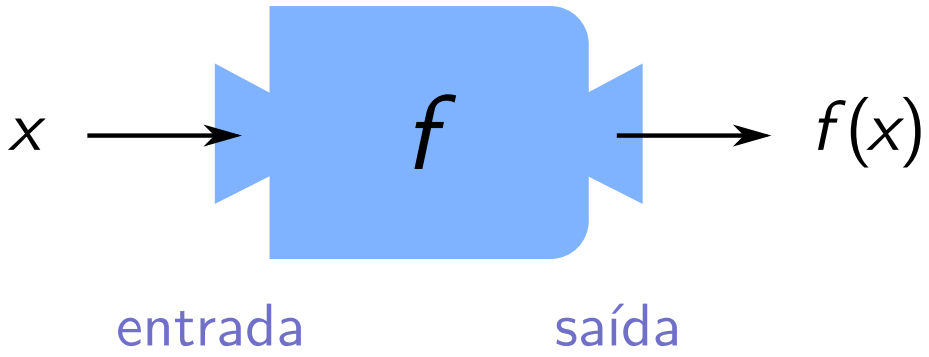
Para que g seja injetora, note que cada número negativo $-a$ possui um número positivo distinto a tal que $f(-a) = f(a) = a^2$.

No domínio $D = [0; +\infty)$, a função g é injetora. Note também que poderíamos ter tomado qualquer subconjunto do intervalo $[0; +\infty)$, ou do intervalo $(-\infty; 0]$.

Portanto, $g : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ tal que $g(x) = x^2$ é uma bijeção.

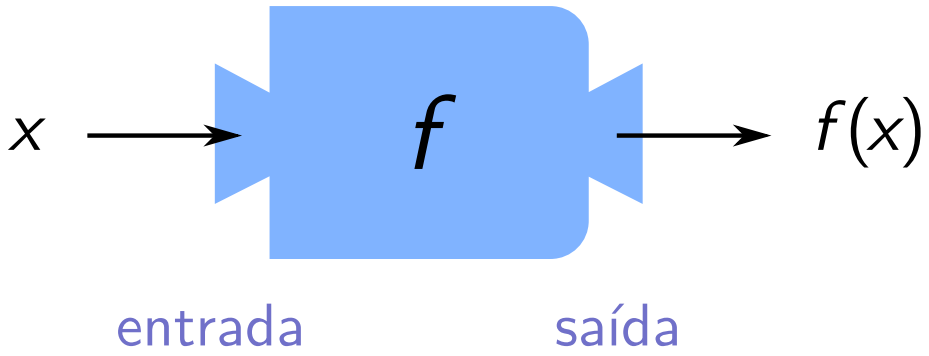
Visualização de funções usando "caixas pretas"

Uma função $f : D \to C$ pode ser enxergada como uma "caixa preta" que toma um número $x \in D$ e leva em um número $f(x) \in C$.

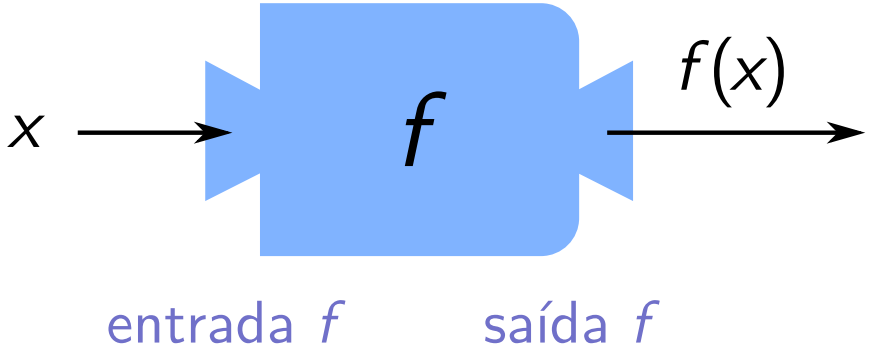


Visualização de funções usando "caixas pretas"

Uma função $f : D \to C$ pode ser enxergada como uma "caixa preta" que toma um número $x \in D$ e leva em um número $f(x) \in C$.

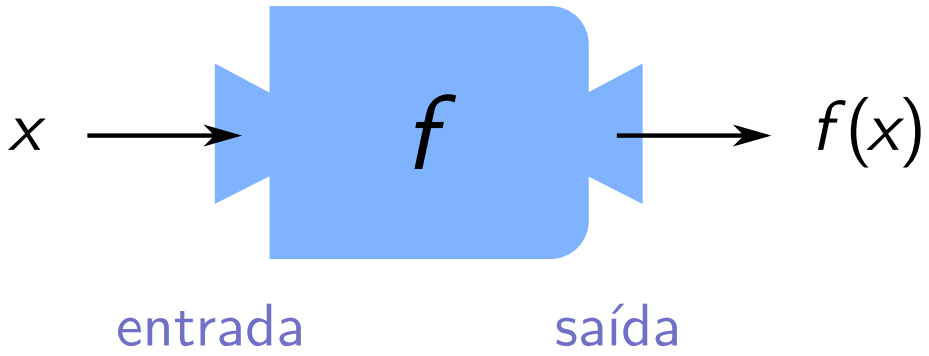


Se f é uma bijeção, então existe uma caixa-preta f^{-1} que "desfaz" o que f faz.

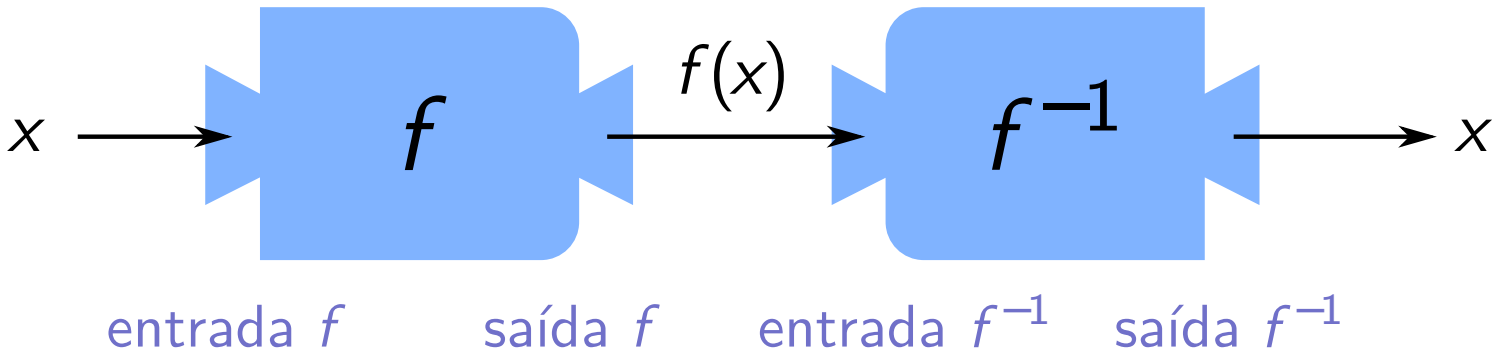


Visualização de funções usando "caixas pretas"

Uma função $f : D \to C$ pode ser enxergada como uma "caixa preta" que toma um número $x \in D$ e leva em um número $f(x) \in C$.

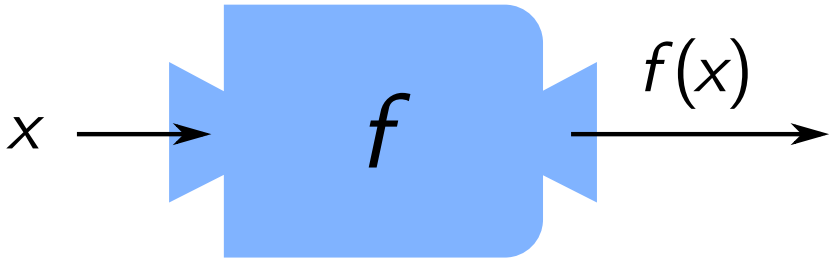


Se f é uma bijeção, então existe uma caixa-preta f^{-1} que "desfaz" o que f faz.



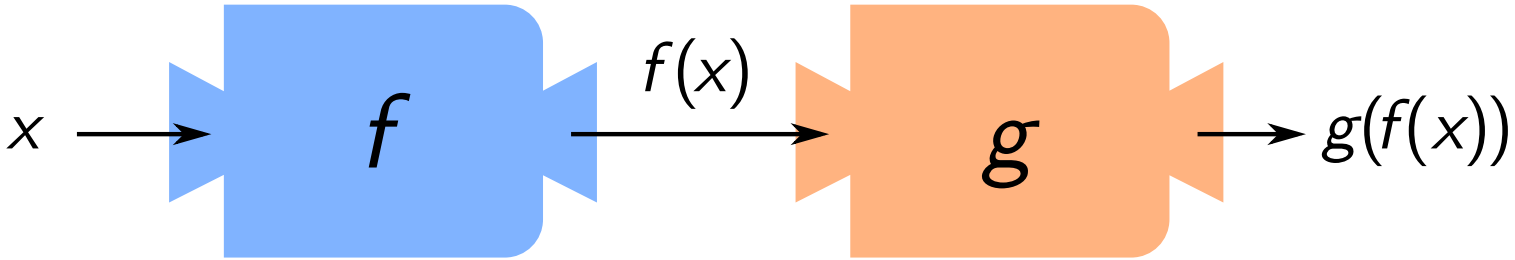
Composição de funções

O que acontece se tivermos $f : A \to B$ e $g : B \to C$ e se "encaixarmos" a saída de f na entrada de g?



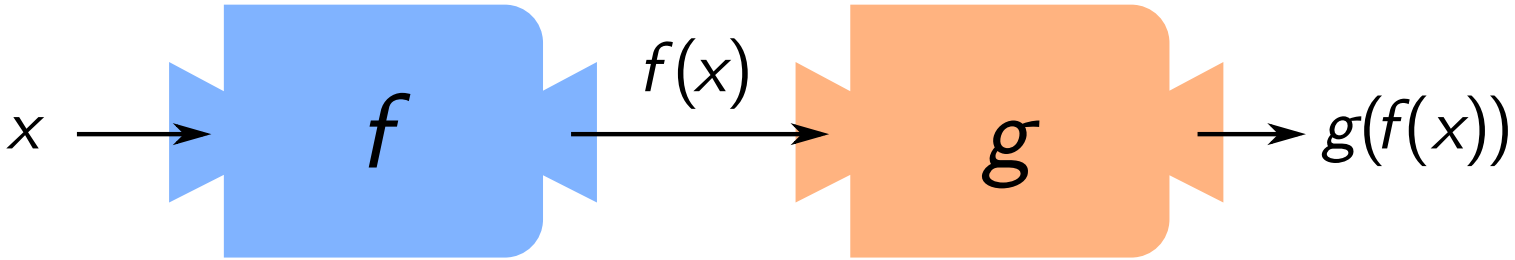
Composição de funções

O que acontece se tivermos $f : A \to B$ e $g : B \to C$ e se "encaixarmos" a saída de f na entrada de g?



Composição de funções

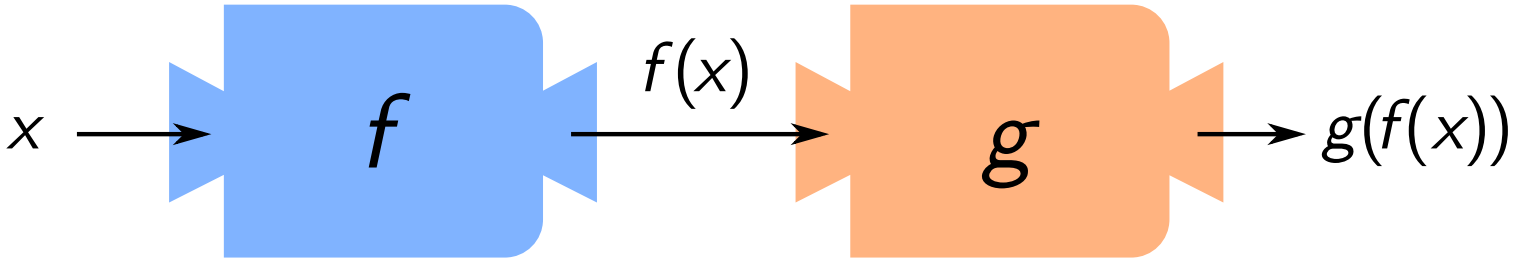
O que acontece se tivermos $f : A \to B$ e $g : B \to C$ e se "encaixarmos" a saída de f na entrada de g?



pode ser visto também como caixa preta

Composição de funções

O que acontece se tivermos $f : A \to B$ e $g : B \to C$ e se "encaixarmos" a saída de f na entrada de g?



pode ser visto também como caixa preta

Definição

A função composta $g \circ f : A \to C$ é definida como a função tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Composição de funções

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + 1$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x$.

O que podemos dizer de $g \circ f$ e de $f \circ g$?

Composição de funções

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + 1$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x$.

O que podemos dizer de $g \circ f$ e de $f \circ g$?

A função $g \circ f$ é tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) =$

Composição de funções

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + 1$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x$.

O que podemos dizer de $g \circ f$ e de $f \circ g$?

A função $g \circ f$ é tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) =$

Composição de funções

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + 1$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x$.

O que podemos dizer de $g \circ f$ e de $f \circ g$?

A função $g \circ f$ é tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = 2x + 2$.

Composição de funções

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + 1$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x$.

O que podemos dizer de $g \circ f$ e de $f \circ g$?

A função $g \circ f$ é tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = 2x + 2$.

A função $f \circ g$ é tal que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$

Composição de funções

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + 1$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x$.

O que podemos dizer de $g \circ f$ e de $f \circ g$?

A função $g \circ f$ é tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = 2x + 2$.

A função $f \circ g$ é tal que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) =$

Composição de funções

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + 1$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x$.

O que podemos dizer de $g \circ f$ e de $f \circ g$?

A função $g \circ f$ é tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = 2x + 2$.

A função $f \circ g$ é tal que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1$.

Composição de funções

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + 1$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x$.

O que podemos dizer de $g \circ f$ e de $f \circ g$?

A função $g \circ f$ é tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = 2x + 2$.

A função $f \circ g$ é tal que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1$.

Conclusão: em geral, as funções $g \circ f$ e $f \circ g$ não são idênticas!

Composição com a inversa

Exercício 3

Se $f : X \to X$ é uma bijeção, o que podemos dizer de $f \circ f^{-1}$ e de $f^{-1} \circ f$?

Composição com a inversa

Exercício 3

Se $f : X \to X$ é uma bijeção, o que podemos dizer de $f \circ f^{-1}$ e de $f^{-1} \circ f$?

Conclusão: a inversa de $f : X \to X$ é a função f^{-1} tal que $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$.

Para casa

- Ler capítulo 6 do texto de A. Caputi e D. Miranda.
- Fazer os exercícios desse capítulo