Lista 4 – Números reais

Exercícios 1–4: A partir dos axiomas $A1, \dots A9$ dos números reais, demonstre o que se pede.

1. O número 0 (zero) é o único elemento neutro da soma.

2. O número 1 é o único elemento neutro da multiplicação.

3. Dado qualquer $a \in \mathbb{R}$, resulta $a \cdot 0 = 0$

4. Para quaisquer números reais a e b, é verdade que:

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 ou b = 0.$$

Exercícios 5–9: Demonstre o que se pede usando propriedades básicas.

5. Se $ax = a$ para algum $a \neq 0$, então $x = 1$

6. $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

7. Se $x^2 = y^2$, então $x = y$ ou $x = -y$

8. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

9. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Exercícios 10–18: Demonstre o que se pede.

10. Se $a \leq b$ e $c \leq d$, então $a + c \leq b + d$.

11. Se $a \leq b$, então $-b \leq -a$.

12. Se $a \leq b$ e $c \geq d$, então $a - c \leq b - d$.

13. Se $a \leq b$ e $c \geq 0$, então $ac \leq bc$.

14. Se $a > 1$, então $a^2 > a$.

15. Se $0 < a < 1$, então $a^2 < a$.

16. Se $0 \leq a < b$ e $0 \leq c < d$, então $ac < bd$.

17. Se $0 \leq a < b$ então $a^2 < b^2$

18. Se $a > 0$, $b > 0$ e $a^2 < b^2$, então $a < b$.

Exercícios 19–25: Expresse em notação de intervalos, usando uniões de intervalos **disjuntos** se necessário, e esboce os intervalos correspondentes na reta real.

19. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \text{ e } x \leq 8\}$

20. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq 5\}$

21. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2 \text{ e } x \geq 3\}$

22. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5 \text{ e } x > 7\}$

23. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 4\}$

24. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 4\}$

25. $\{x \in \mathbb{R} \mid (x - 1)^2 \leq 4\}$

Exercícios 26-29: Demonstre o que se pede.

26. A interseção de dois intervalos abertos é um intervalo aberto.

27. A interseção de n intervalos abertos é um intervalo aberto.

28. A interseção de dois intervalos fechados é um intervalo fechado.

29. A interseção de n intervalos fechados é um intervalo fechado.

Respostas de exercícios selecionados:

Note que vários dos exercícios propostos foram resolvidos em aula e outros são muito similares a exercícios já resolvidos.

5. Por hipótese, $ax = a$ e como $a \neq 0$ existe a^{-1}. Logo $a^{-1}(ax) = x$ por um lado, e por outro $a^{-1}(ax) = a^{-1}(a) = 1$. Logo $x = 1$.

6. Use a distributividade e faça as contas.

7. Se $x^2 = y^2$ temos que $x^2 - y^2 = 0$ o que implica $(x + y)(x - y) = 0$, portanto $x + y = 0$ ou $x - y = 0$, o que nos permite concluir que $x = -y$ ou $x = y$.

14. Como $a > 1$ temos $a > 0$ logo, multiplicando ambos os lados da equação $a > 1$ por a, temos $a^2 > a$.

17. Como $0 \leq a < b$, multiplicando $a < b$ por a temos:

$$a^2 < ab$$

Como $0 \leq a < b$, multiplicando $a < b$ por b temos:

$$ab < b^2$$

Logo por transitividade temos: $a^2 < b^2$.