

BC0407 - Funções de Várias Variáveis
Lista 3 - Derivadas Parciais e Diferenciabilidade
Profa. Juliana Pimentel

07.03.2016

Exercício 1. Se $f(x, y) = \arctan(xy) + \sin(xy) + xy + 1$, verifique que $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Exercício 2. Se $z = x^4 + \sin(x + y) - y \ln x$, verifique que $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial^2 x} - 2 \frac{\partial^3 z}{\partial^2 y \partial x} + \frac{\partial^3 z}{\partial^3 y} = \frac{1}{x^2}$.

Exercício 3. Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ para as seguintes funções.

(a) $f(x, y) = x \cos(x) \cos(y)$ (b) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$ (c) $f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$
(d) $f(x, y) = x^y$ (e) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 3}$ (f) $f(x, y) = \frac{x \sin(y)}{\cos(x^2 + y^2)}$

Exercício 4. Seja $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$. Mostre que

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{4x}{3(x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Exercício 5. Verifique se as funções abaixo são diferenciáveis em $(0, 0)$.

(a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(b) $f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} \cos(y)$

(c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(d) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Exercício 6. Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ em $(2, 1)$ e use-a para aproximar $f(1.95, 1.08)$.

Exercício 7. Considere a superfície dada implicitamente por

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 = -4xyz$$

- (1) Calcule as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ em um ponto genérico.
- (2) Quais os pontos nos quais as derivadas parciais calculadas no ítem anterior não estão definidas?
- (3) Encontre a equação do plano tangente à superfície dada no ponto $(2, -1, -1)$.