

BC0407 - Funções de Várias Variáveis
Lista 8 - Integrais Triplas e Mudança de Variáveis
Profa. Juliana Pimentel

04.05.2016

Exercício 1. Usando coordenadas esféricas, calcule:

- (a) $\int \int \int (x^2 + y^2 + z^2)^2 dV$, $B = \{(x, y) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 5\}$
- (b) $\int \int \int z dV$, B delimitada por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, no primeiro octante.
- (c) $\int \int \int x^2 dV$, B delimitada pelo plano xz e pelos hemisférios $y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$ e $y = \sqrt{16 - x^2 - z^2}$.
- (d) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy dz dy dx$.

Exercício 2. Calcule o volume da parte da bola $\rho \leq a$ que está entre os cones $\phi = \pi/6$ e $\phi = \pi/3$.

Exercício 3. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz = 2\pi,$$

sabendo que a integral imprópria tripla é definida como o limite da integral tripla sobre uma esfera sólida quando o raio da esfera aumenta indefinidamente.

Exercício 4. Calcule

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{y/2}^{(y/2)+1} \left(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3} \right) dx dy dz = 2\pi,$$

aplicando a transformação

$$u = \frac{2x-y}{2}, v = \frac{y}{2}, w = \frac{z}{3}.$$

Exercício 5. Calcule as seguintes integrais, efetuando uma mudança de variáveis apropriada:

- (a) $\int \int_R \frac{x-2y}{3x-y} dA$ onde R é o paralelogramo delimitado pelas retas $x-2y=0$, $x-2y=4$, $3x-y=1$, $3x-y=8$
- (b) $\int \int_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA$ onde R é a região trapezoidal com vértices $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$, $(0,1)$
- (c) $\int \int_R e^{(x+y)} dA$ onde R é dada pela inequação $|x| + |y| \leq 1$

Exercício 6. Seja f uma função contínua em $[0, 1]$ e seja R a região triangular com vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Mostre que

$$\int \int_R f(x+y) dA = \int_0^1 u f(u) du.$$