Questão 1

(a)

p	q	$p \vee \sim q$	$\sim(p \vee \sim q)$	$\sim p \vee q$	$p \oplus q$
V	V	V	F	V	F
V	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F

$$p \oplus q = \sim(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$$

(b) a e b paridades diferentes $\Leftrightarrow$ $a+b$ ímpar

(1). a e b paridades diferentes $\Rightarrow$ $a+b$ ímpar

$a = 2K_1$, $b = 2K_2+1$, $K_1, K_2 \in \mathbb{Z}$

$a+b = 2K_1 + 2K_2 + 1 = 2\underbrace{(K_1+K_2)}_{\in \mathbb{Z}} + 1$ ímpar

(2). $a+b$ ímpar $\Rightarrow$ a e b paridades diferentes

contrapositiva: a e b paridades iguais $\Rightarrow$ $a+b$ par

• $a = 2K_1$, $b = 2K_2 \Rightarrow a+b = 2K_1 + 2K_2 = 2\underbrace{(K_1+K_2)}_{\in \mathbb{Z}}$ par

• $a = 2K_1+1$, $b = 2K_2+1 \Rightarrow a+b = 2K_1+1+2K_2+1$

$= 2(K_1+K_2)+2$

$= 2\underbrace{(K_1+K_2+1)}_{\in \mathbb{Z}}$ par

Questão 2

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$$

1. $A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \setminus C$

$x \in A \setminus (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ e $x \notin (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ e $x \notin B$ e $x \notin C$

$\Rightarrow x \in (A \setminus B)$ e $x \notin C$

$\Rightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C.$

2. $(A \setminus B) \setminus C \subset (A) \setminus (B \cup C)$

$x \in (A \setminus B) \setminus C \Rightarrow x \in (A \setminus B)$ e $x \notin C$

$\Rightarrow x \in A$ e $x \notin B$ e $x \notin C$

$\Rightarrow x \in A$ e $x \notin (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A \setminus (B \cup C)$

Questão 3

$\underline{n=0}$ $(a-1)\cdot(1) = a^1 - 1$

$(a-1)\cdot(1) = a - 1 = a^1 - 1$ (verdadeiro)

$\underline{n=k}$ $(a-1)(1+a+\dots+a^k) = a^{k+1} - 1$

$\underline{n=k+1}$ $(a-1)(1+a+\dots+a^{k+1}) = a^{k+2} - 1$

$(a-1)(1+a+\dots+a^k+a^{k+1})$

$= \underbrace{(a-1)(1+a+\dots+a^k)}_{n=k} + (a-1)(a^{k+1})$

$= a^{k+1} - 1 + (a-1)(a^{k+1})$

$= \cancel{a^{k+1}} - 1 + a\cdot a^{k+1} - \cancel{a^{k+1}}$

$= -1 + a^{k+1+1}$

$= a^{k+2} - 1$ (verdadeiro)

Questão 4

- $1-x \geq 0$ e $2-x \geq 0$

$-x \geq 1$ $\quad$ $-x \geq -2$

$x \leq 1 \cap x \leq 2 = \{x \leq 1\}$

$-(1-x)+(2-x) < x+1$

$-1+\cancel{x}+2-\cancel{x} < x+1$

$1 < x+1$

$0 < x \cap \{x \leq 1\} = \boxed{\{0 < x \leq 1\}}$

- $1-x \geq 0$ e $2-x < 0$

$-x \geq -1$ $\quad$ $-x < -2$

$x \leq 1 \cap x > 2 = \emptyset$

- $1-x < 0$ e $2-x \geq 0$

$-x < -1$ $\quad$ $-x \geq -2$

$x > 1 \cap x \leq 2 = \{1 < x \leq 2\}$

$1-x+2-x < x+1$

$3-2x < x+1$

$-3x < -2$

$3x > 2$

$x > 2/3 \cap \{1 < x \leq 2\} = \boxed{\{1 < x \leq 2\}}$

- $1 - x < 0$ e $2 - x < 0$

$$-x < -1 \qquad -x < -2$$

$$x > 1 \quad \cap \quad x > 2 \quad = \{x > 2\}$$

$$1 - x - (2 - x) < x + 1$$

$$1 - \cancel{x} - 2 + \cancel{x} < x + 1$$

$$-1 < x + 1$$

$$-2 < x \quad \cap \{x > 2\} = \boxed{\{x > 2\}}$$

$$S = \{0 < x \leq 1\} \cup \{1 < x \leq 2\} \cup \{x > 2\}$$

$$= (0, 1] \cup (1, 2] \cup (2, +\infty)$$

$$= (0, +\infty)$$

Questão 5

Domínio: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$

Imagem: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = \mathbb{R}_+^*$

Paridade: $f(-x) = \frac{1}{|-x|} = \frac{1}{|x|} = f(x)$

Injetividade em $\mathbb{R}^*$: $-1 \neq 1$ mas

$$f(-1) = \frac{1}{|-1|} = 1 = \frac{1}{|1|} = f(1)$$

f não é injetora em $\mathbb{R}^*$

Injetividade em $(0, +\infty)$: $x_1 \neq x_2$, $x_1 > 0, x_2 > 0$

$$f(x_1) = \frac{1}{|x_1|} = \frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2} = \frac{1}{|x_2|} = f(x_2)$$

Injetividade em $(-\infty, 0)$: $x_1 \neq x_2$, $x_1 < 0$, $x_2 < 0$

$$f(x_1) = \frac{1}{|x_1|} = -\frac{1}{x_1} \neq -\frac{1}{x_2} = \frac{1}{|x_2|} = f(x_2)$$

Sobrejetividade em $\mathbb{R}_+^*$: $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists x \in (0, +\infty)$ tq

$f(x) = y$, i.e., $\frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} = y$

$$\boxed{x = \frac{1}{y}}$$

$\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists x \in (-\infty, 0)$ tq

$f(x) = y$, ie, $\frac{1}{|x|} = -\frac{1}{x} = y$ $\boxed{x = -\frac{1}{y}}$

Logo a função $f: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ tem inversa

$$f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow (0, +\infty)$$
$$y \longmapsto \frac{1}{y}$$

e a função $f: (-\infty, 0) \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ tem inversa

$$f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow (-\infty, 0)$$
$$y \longmapsto -\frac{1}{y}.$$