Questão 1

a)

p	q	$p \vee \sim q$	$\sim(p \vee \sim q)$	$\sim p \wedge q$	$p \oplus q$
V	V	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	F

$p \oplus q = \sim(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \wedge q)$

b) n e m mesma paridade $\Leftrightarrow$ n+m par

1. n e m mesma paridade $\Rightarrow$ n+m par

- $n = 2k_1$, $m = 2k_2$

$n + m = 2k_1 + 2k_2$

$= 2\underbrace{(k_1 + k_2)}_{\in \mathbb{Z}}$ par

- $n = 2k_1 + 1$, $m = 2k_2 + 1$

$n + m = 2k_1 + 1 + 2k_2 + 1$

$= 2\underbrace{(k_1 + k_2 + 1)}_{\in \mathbb{Z}}$ par

2. n+m par $\Rightarrow$ n e m mesma paridade

contrapositiva: n e m paridades diferentes $\Rightarrow$ n+m ímpar

$n = 2k_1$, $m = 2k_2 + 1$

$n + m = 2k_1 + 2k_2 + 1$

$= 2\underbrace{(k_1 + k_2)}_{\in \mathbb{Z}} + 1$ ímpar

Questão 2

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$$

1. $A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \setminus C$

$x \in A \setminus (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ e $x \notin (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ e $x \notin B$ e $x \notin C$

$\Rightarrow x \in (A \setminus B)$ e $x \notin C$

$\Rightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C.$

2. $(A \setminus B) \setminus C \subset (A) \setminus (B \cup C)$

$x \in (A \setminus B) \setminus C \Rightarrow x \in (A \setminus B)$ e $x \notin C$

$\Rightarrow x \in A$ e $x \notin B$ e $x \notin C$

$\Rightarrow x \in A$ e $x \notin (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A \setminus (B \cup C)$

Questão 3

$n = 1$ $\quad 1^2 = \dfrac{1(2 \cdot 1 + 1)(1+1)}{6}$

$$\frac{1 \cdot (2 \cdot 1 + 1)(1+1)}{6} = \frac{3 \cdot 2}{6} = 1 = 1^2 \text{ (Verdadeiro)}$$

$n = k$ $\quad 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \dfrac{k(2k+1)(k+1)}{6}$

$n = k+1$ $\quad 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \dfrac{(k+1)(2(k+1)+1)(k+2)}{6}$

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + k^2}_{n=k} + (k+1)^2 =$$

$$\frac{k(2k+1)(k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$\frac{k(2k+1)(k+1) + 6(k+1)^2}{6} =$$

$$\frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} =$$

$$\frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} =$$

$$\boxed{\frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}}$$

$$(k+1)(2(k+1)+1)(k+2) =$$

$$(k+1)(2k + 2 + 1)(k+2) =$$

$$(k+1)(2k^2 + 3k + 4k + 6) =$$

$$\boxed{\frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}}$$

(verdadeiro)

Questão 4

- $x-1 \geq 0$ e $x-2 \geq 0$

$x \geq 1 \cap x \geq 2 = \{x \geq 2\}$

$x-1-(x-2) > -x$

$\cancel{x}-1-\cancel{x}+2 > -x$

$1 > -x$

$-1 < x \cap \{x \geq 2\} = \boxed{\{x \geq 2\}}$

- $x-1 \geq 0$ e $x-2 < 0$

$x \geq 1 \cap x < 2 = \{1 \leq x < 2\}$

$x-1+x-2 > -x$

$2x-3 > -x$

$3x > 3$

$x > 1 \cap \{1 \leq x < 2\} = \boxed{\{1 < x < 2\}}$

- $x-1 < 0$ e $x-2 \geq 0$

$x < 1 \cap x \geq 2 = \emptyset$

- $x-1 < 0$ e $x-2 < 0$

$x < 1 \cap x < 2 = \{x < 1\}$

$-(x-1)+(x-2) > -x$

$-x+1+x-2 > -x$

$-1 > -x$

$1 < x \cap \{x < 1\} = \emptyset$

$S = \{x \geq 2\} \cup \{1 < x < 2\} = (1,2) \cup [2,+\infty) = (1,+\infty)$

Questão 5

Domínio: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$

Imagem: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} = \mathbb{R}^*_-$

Paridade: $f(-x) = -\dfrac{1}{|-x|} = -\dfrac{1}{|x|} = f(x)$

Injetividade em $\mathbb{R}^*$

$-1 \neq 1$ mas $f(-1) = -\dfrac{1}{|-1|} = -1 = -\dfrac{1}{|1|} = f(1)$

f não é injetora em $\mathbb{R}^*$

Injetividade em $(0, +\infty)$

$x_1 \neq x_2$, $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$

$f(x_1) = -\dfrac{1}{|x_1|} = -\dfrac{1}{x_1} \neq -\dfrac{1}{x_2} = -\dfrac{1}{|x_2|} = f(x_2)$

Injetividade em $(-\infty, 0)$

$x_1 \neq x_2$, $x_1 < 0$ e $x_2 < 0$

$f(x_1) = -\dfrac{1}{|x_1|} = \dfrac{1}{x_1} \neq \dfrac{1}{x_2} = -\dfrac{1}{|x_2|} = f(x_2)$

Sobrejetividade em $\mathbb{R}^*_-$

$\forall y \in \mathbb{R}^*_-$, $\exists\, x \in (0, +\infty)$ tq $f(x) = y$, i.e., $-\dfrac{1}{|x|} = -\dfrac{1}{x} = y$

$\Rightarrow \boxed{x = -1/y}$

$\forall y \in \mathbb{R}^*_-$, $\exists\, x \in (-\infty, 0)$ tq $f(x) = y$, i.e., $-\dfrac{1}{|x|} = \dfrac{1}{x} = y$

$\Rightarrow \boxed{x = \dfrac{1}{y}}$

Logo a função $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ tem inversa

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow (0, +\infty)$$
$$y \longmapsto -\frac{1}{y}$$

e a função $f : (-\infty, 0) \longrightarrow \mathbb{R}_-^*$ tem inversa

$$f^{-1} : \mathbb{R}_-^* \longrightarrow (-\infty, 0)$$
$$y \longmapsto \frac{1}{y}.$$