BC0407 - Funções de Várias Variáveis
Teste 1

Profa. Juliana Pimentel

Exercício 1. Seja $f(x, y) = e^{xy}$ uma função de duas variáveis.

(1) Determine o domínio e a imagem de f.
(2) Determine as curvas de nível de f e represente-as graficamente.

Exercício 2. .

(1) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Mostre que $u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$, em que $a \neq 0$, satisfaz a equação da onda
$$u_{tt} = a^2 u_{xx}.$$
(2) Seja h uma função de duas variáveis com derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Se $z = h(x, y)$ em que $x = r^2 + s^2$ e $y = 2rs$, determine $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s}$.

Exercício 3. Considere a função:
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(1) A função f é contínua em $(0, 0)$? Justifique.
(2) Obtenha as derivadas parciais f_x e f_y.
(3) A função f é diferenciável em $(0, 0)$? Justifique.

Exercício 4. Considere a função $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

(1) Determine a taxa de variação máxima de f em $(1, 1)$ e a direção em que isso ocorre.
(2) Determine a derivada direcional de f em $(1, 1)$ na direção do vetor $v = (3, 4)$.
(3) Mostre que $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

Exercício 5. Considere a função $f(x, y) = xg(x^2 - y^2)$ onde $g(u)$ é uma função diferenciável. Mostre que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, a, f(a, a))$ passa pela origem.