

# Lista 1 - FVV

Funções de várias variáveis: domínio, imagem, gráfico, curva de nível, superfície de nível

1º quadrimestre de 2015 - Professor Maurício Richartz

**Leitura mínima recomendada:** Stewart (5ª ed.) - seções 10.5, 12.5, 12.6 e 14.1

Obs: a maioria dos exercícios foi retirada/adaptada de livros como o Stewart, o Guidorizzi e o Apostol.

1 — Identifique e esboce as curvas abaixo no plano  $xy$ .

a)  $9x^2 - 6x + 4y^2 + 2 = 0$

b)  $y + 2x^2 + 4x + 3 = 0$ ,

c)  $3x + 2y - 4 = 0$ ,

d)  $x = -\sqrt{1 - y^2}$

e)  $y = \sqrt{4 - 4x^2}$ ,

f)  $16x^2 - 9y^2 = -144$ ,

g)  $2x^2 + 3y^2 = 6$ ,

h)  $y^2 + 3y + x + 7 = 0$ ,

i)  $4x^2 + 4y^2 + 4y = 0$ ,

j)  $-2x^2 + 4y^2 + 4y = 0$ ,

2 — Identifique e esboce as superfícies abaixo.

a)  $x^2 + z^2 = 5$ ,

b)  $25x^2 + 4y^2 + z^2 = 100$ ,

c)  $25x^2 + 4y^2 + z^2 - 2z = 99$ ,

d)  $z = 1 - y^2$

e)  $x = y^2 + 4z^2$ ,

f)  $x^2 = y^2 + 4z^2$ ,

g)  $x = y^2 - z^2$ ,

h)  $-x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$ ,

i)  $9x^2 - y^2 + z^2 = 0$ ,

j)  $4x^2 + 9y^2 + z = 0$ ,

k)  $4x^2 - 16y^2 + z^2 = 16$ ,

l)  $z = x + y + 1$ ,

m)  $z = \operatorname{sen} y$ ,

n)  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,

o)  $x = \sqrt{1 - z^2 - y^2}$ ,

p)  $x + y = 1$ .

3 — Determine o domínio das funções abaixo e esboce a região do plano/espço correspondente:

a)  $f(x, y) = \ln(x + 2y - 2)$ ,

b)  $f(x, y) = \ln(\sqrt{3x^2 + 2y^2 - 6})$ ,

c)  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x}}$ ,

d)  $f(x, y) = \frac{e^{y-x^2}}{\sqrt{4x-y}}$ ,

e)  $f(x, y) = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)}$ ,

f)  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt[4]{4x^2 + 4y^2 - z^2}}$ ,

g)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2 - 1}$ ,

h)  $f(x, y, z) = \ln(x + 2y - 2)$ .

4 — Determine (i) o domínio (esboce a região correspondente) e (ii) a imagem das das funções abaixo. (iii) Esboce as curvas de nível  $C_k$  da função para os valores  $k$  indicados (i.e. esboce o gráfico de  $f(x, y) = k$ ).

|  |   |
|--|---|
| a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ [k = $\pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$ ]                                 | e) $f(x, y) = y^2 - x$ [k = $0, \pm 1, \pm 2$ ]           |
| b) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$ [k = $100, 10, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ] | f) $f(x, y) = e^{y^2-x}$ [k = $1, e^{\pm 1}, e^{\pm 2}$ ] |
| c) $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 4y$ [k = $-1, 0, 4, 16$ ]                                     | g) $f(x, y) = e^{xy}$ [k = $1, e^{\pm 1}, e^{\pm 2}$ ]    |
| d) $f(x, y) = \cos(x + y)$ [k = $-1, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$ ]            |   |

**5** — Aplicações simples em Física

- a) Uma camada fina de metal, localizada no plano  $xy$ , tem temperatura  $T(x, y)$  no ponto  $(x, y)$ . As curvas de nível de  $T$  são chamadas de isotérmicas porque todos os pontos em uma isotérmica tem a mesma temperatura. Faça o esboço de algumas isotérmicas se a função da temperatura (em °C) for dada por  $T(x, y) = 100/(1 + x^2 + 2y^2)$ .
- b) Se  $V(x, y)$  é o potencial elétrico de um ponto  $(x, y)$  do plano  $xy$ , as curvas de nível de  $V$  são chamadas curvas equipotenciais, porque nelas todos os pontos tem o mesmo potencial elétrico. Esboce algumas curvas equipotenciais de  $V(x, y) = c/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ , onde  $c$  é uma constante positiva.

**6** — Esboce o gráfico e as curvas de nível das seguintes funções:

|                            |  |
|----------------------------|--|
| a) $f(x, y) = 3$ .         | e) $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$ .                   |
| b) $f(x, y) = 1 - x - y$ . | f) $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$ .                  |
| c) $f(x, y) = \cos(x)$ .   | g) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{16}}$ . |
| d) $f(x, y) = 1 - x^2$ .   | h) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .                |

**7** — Esboce as superfícies de nível das seguintes funções para os valores de  $k$  indicados (i.e. esboce o gráfico de  $f(x, y, z) = k$ ):

|   |  |
|---|--|
| a) $f(x, y, z) = x$ [k = $0, \pm 1$ ]         | c) $f(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{9}$ [k = $0, 1, 4$ ] |
| b) $f(x, y, z) = x + y + z$ [k = $0, \pm 2$ ] | d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ [k = $0, 1, 4$ ]     |

**8** — Nos itens abaixo é necessário utilizar algum site ou programa de manipulação matemática para fazer o esboço dos gráficos das funções de duas variáveis.

- a) Esboce o gráfico das funções  $g(x) = x$ ,  $g(x) = e^x$ ,  $g(x) = \ln x$ ,  $g(x) = \sin x$ ,  $g(x) = 1/x$ . Em seguida, a partir de cada função  $g(x)$ , construa a função  $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$  e esboce seu gráfico no site/programa. Por exemplo, para  $g(x) = \ln x$  teremos  $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ . Observe as características comuns aos gráficos das funções  $f(x, y)$ . Você consegue detectar alguma simetria presente em todos os gráficos de  $f(x, y)$ ? A partir de duas observações, conjecture como se faz para obter o gráfico de  $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$  a partir do gráfico de uma função qualquer  $g(x)$ .
- b) As funções  $f(x, y) = xy^2 - x^3$  e  $f(x, y) = xy^3 - yx^3$  são conhecidas, respectivamente, como sela de macaco (“monkey saddle”) e sela de cachorro (“dog saddle”). Esboce o gráfico dessas funções e pesquise na internet o porquê desses nomes.