Lista 2 - FVV

Funções de várias variáveis: limites e continuidade

1° quadrimestre de 2015 - Professor Maurício Richartz

Leitura mínima recomendada: Stewart (7^a ed.) - seções 14.2 (limites e continuidade); 10.1 (parametrização); 10.3 (coordenadas polares). Apostol 8.2 (conjuntos abertos/fechados).
Obs: a maioria dos exercícios foi retirada/adaptada dos livros do Stewart, do Anton e do Apostol.

1 — Nos exercícios abaixo, determine se o limite existe. Se existir, determine o seu valor. Justifique a resposta.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-5x^2y^3+3}{7x^4y^2-2x^2y^2+2}$,

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2+2xy+y^2}{x+y}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{2x^6+y^2}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^2}{x^2+y^2}$

h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2}-1}{x^2+y^2}$

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sec x \tan y$

j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^2 \ln\left[(x^2+y^2)^2\right]$

k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|}$

m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,3)} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2$

n) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(2x)-2x+y}{x^3+y}$

o) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,-1,0)} \frac{x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz}{x+y-z}$

2 — Para cada função abaixo, determine o conjunto X de pontos do plano/espaço onde a função é contínua (justifique sua resposta). Esboce a região correspondente.

a) $f(x,y) = x^4+y^4-4x^2y^2$,

b) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$,

c) $f(x,y) = \ln\left[\cos\left(x^2+y^2\right)\right]$,

d) $f(x,y) = \frac{1}{y}\cos x^2$,

e) $f(x,y) = \tan\left(\frac{x^2}{y}\right)$,

f) $f(x,y) = \arccos\left(\sqrt{\frac{x^2}{y}}\right)$,

g) $f(x,y) = \sqrt{x^2-4y^2+1}$,

h) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1-x-y}}$,

i) $f(x,y,z) = \ln\left(4-x^2-y^2-z^2\right)$,

j) $f(x,y,z) = \arctan\left(\sqrt{1-4x^2-9y^2-z^2}\right)$,

3 — Determine, quando possível, o valor de $a \in \mathbb{R}$ para que a função seja contínua em $(0,0)$. Em cada caso, analise tambbém a continuidade da função nos outros pontos do seu domínio.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases},$

b) $f(x,y) = \begin{cases} (x^{10}+y^4)sen\left(\frac{1}{x^8+y^6}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases},$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases},$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases},$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2 \cos y sen x}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases},$

f) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases},$

4 — **(Limites Iterados)** Seja $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. a) Qual o domínio da função? b) Mostre que $\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right] = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right] = 0$ (obs: esses limites são denominados limites iterados). c) Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe. d) A que conclusão geral sobre os limites iterados você pode chegar usando esse resultado?

5 — Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0 \text{ ou } y \geq x^2; \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Mostre que $f(x,y) \to 0$ à medida que $(x,y) \to (0,0)$ ao longo de qualquer reta que passa pela origem.

b) Encontre uma curva que passa pela origem para a qual $f(x,y) = 1$ em todos os seus pontos (com exceção da origem).

c) A função $f(x,y)$ é contínua na origem?