PROVA 1 - IEDO 2017.2 - Versão B



1) a) Significa dizer que existe uma função $\phi: I \to \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, tal que $x_0 = 1 \in I$, $\phi(1) = 0$ e $\phi'' \ln x - \frac{\phi'}{x} + \frac{2\phi}{x^2} = 0$, ou seja $\phi$ satisfaz à condição inicial e satisfaz a EDO para todo $x \in I$.

b) Vamos testar: $\phi(x) = (\ln x)^2 \Rightarrow \phi'(x) = 2 . \ln x . \frac{1}{x} \Rightarrow \phi''(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{2\ln x}{x^2}$. Substituindo,

$$\phi'' \ln x - \frac{\phi'}{x} - \frac{2\phi}{x^2} = \frac{2}{x^2} \cancel{\ln x} - \cancel{\frac{2(\ln x)^2}{x^2}} - \cancel{\frac{2\ln x}{x^2}} - \cancel{\frac{2(\ln x)^2}{x^2}} = 0 \Rightarrow \text{satisfaz a EDO}$$

$\bullet\ \phi(1) = (\ln 1)^2 = 0^2 = 0 \Rightarrow$ satisfaz a condição inicial.

} é solução do PVI

2)

a) $y' + 2xy = (\operatorname{sen} x) e^{-x^2}, \ y(0) = 3$

Fator integrante: $\mu = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2} \Rightarrow e^{x^2} \cdot (y' + 2xy) = e^{x^2} . (\operatorname{sen} x) . e^{-x^2}$

$$\Rightarrow e^{x^2} . (y' + 2xy) = \operatorname{sen} x \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{x^2} . y\right) = \operatorname{sen} x \Rightarrow e^{x^2} . y = \int \operatorname{sen} x \, dx + C = -\cos x + C$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{C - \cos x}{e^{x^2}}; \quad y(0) = 3 \Rightarrow \frac{C - \cos(0)}{e^0} = 3 \Rightarrow C - 1 = 3 \Rightarrow C = 4. \text{ Logo,}$$

$$\boxed{y(x) = (4 - \cos x) e^{-x^2}}$$

b) $y' = y(y-3)x^2, \ y(0) = -\frac{3}{2}$

$$\frac{dy}{y(y-3)} = x^2 dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y(y-3)} = \int x^2 dx + C; \quad \frac{1}{y(y-3)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-3} = \frac{A.(y-3) + B.y}{y(y-3)} = \frac{1}{y(y-3)}$$

$$\begin{cases} 3B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{3} \\ -3A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{3}\ln|y| + \frac{1}{3}\ln|y-3| = \frac{x^3}{3} + C \Rightarrow \ln\left|\frac{y-3}{y}\right| = x^3 + 3C \Rightarrow \left|\frac{y-3}{y}\right| = e^{3C} . e^{x^3}$$

$$\Rightarrow \frac{y-3}{y} = K . e^{x^3} \Rightarrow y - 3 = y . K . e^{x^3} \Rightarrow y(1 - Ke^{x^3}) = 3 \Rightarrow y(x) = \frac{3}{1 - Ke^{x^3}}; \ y(0) = \frac{3}{1-K} = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow -2 = 1 - K \Rightarrow K = 3 \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{3}{1 - 3e^{x^3}}}$$

c) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ ; $y(1) = -1$

Substituição $\frac{y}{x} = v \Rightarrow y = v.x \Rightarrow y' = v'x + v = e^{v} + v \Rightarrow v'.x = e^{v}$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{e^{v}}{x} \Rightarrow dv.e^{-v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int e^{-v}dv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -e^{-v} = \ln|x| + K$$

$$e^{-v} = -\ln|x| - K \Rightarrow -v = \ln(-\ln|x| - K) \Rightarrow v = \frac{y}{x} = -\ln(-\ln|x| - K)$$

$$\Rightarrow y(x) = -x\ln(-\ln|x| - K) ; \; y(1) = -1 \Rightarrow -1 = 1\ln(-\ln 1 - K)$$

$$\Rightarrow \ln(-K) = 1 \Rightarrow -K = e \Rightarrow \boxed{y(x) = -x.\ln(e - \ln|x|)}$$

3) $\frac{dN}{dt} = 3N \Rightarrow N = N_0 . e^{3t}$ ; $N(t) = 400000$ para $t = 3 \Rightarrow$

$$400000 = N_0 . e^{3.3} = N_0 . (e^{3})^{3} = N_0 . (20)^{3} \Rightarrow N_0 = \frac{\cancel{400}000}{\cancel{400}.20} = 50$$

Fazendo $e^{3} = 20$

$$\boxed{\Rightarrow N_0 = 50}$$

4) $K(t)$ = quantidade de Kryptonita $\Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{\alpha}{(A(t))^{2}}$

$A(t)$ = quantidade de Adamantium $\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 5 \Rightarrow A(t) = A_0 + 5t = 50 + 5t = 5(10+t)$

$A_0 = 50$ ; $K(10) = 1$ ; $K(0) = 0$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{\alpha}{5^{2}(10+t)^{2}} \Rightarrow K = \int \frac{\alpha}{25(10+t)^{2}} + C = -\frac{\alpha}{25} . (10+t)^{-1} + C ;$$

$$K(0) = 0 \Rightarrow -\frac{\alpha}{25} . (10+0)^{-1} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{\alpha}{250} \Rightarrow K(t) = \frac{\alpha}{250} - \frac{\alpha}{25} . \frac{1}{10+t}$$

$$K(10) = 1 \Rightarrow \frac{\alpha}{250} - \frac{\alpha}{25} . \frac{1}{20} = 1 \Rightarrow \frac{\alpha}{500} = 1 \Rightarrow \alpha = 500 \Rightarrow K(t) = 2 - \frac{20}{10+t}$$

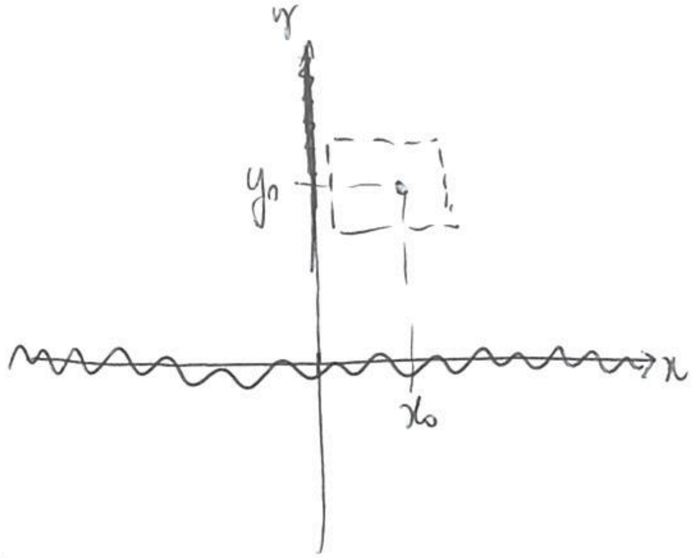
a) $K(t) = 1,5 \Rightarrow 2 - \frac{20}{10+t} = 1,5 \Rightarrow \frac{20}{10+t} = 0,5 = \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{10}_{2}} \Rightarrow 40 = 10 + t \Rightarrow \boxed{t = 30 \text{ horas}}$

b) Quando $t \to \infty$, temos que $\lim_{t\to\infty} K(t) = \lim_{t\to\infty}\left(2 - \frac{20}{10+t}\right) = \boxed{2\ mg}$ 3

5) $\frac{dy}{dx} = \frac{(1-y)(y-2)}{y^2} = f(x,y) = \frac{y-2-y^2+2y}{y^2} = \frac{3}{y} - \frac{2}{y^2} - 1$

a) Para aplicar o TEU, precisamos analisar $f(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Temos

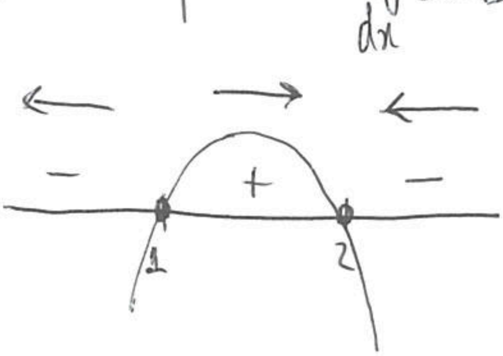
$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3}{y^2} + \frac{4}{y^3}$. Tanto $f(x,y)$ como $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são funções racionais e, portanto, são contínuas em todos os pontos de seus domínios. Dessa forma, só não serão contínuas em $y=0$.




Dado qualquer ponto ~~tom~~ $(x_0, y_0)$ com $y_0 \neq 0$, podemos desenhar um retângulo aberto em torno dele dentro do qual tanto $f$ com $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas. Logo, podemos aplicar o TEU para qualquer condição inicial $y(x_0) = y_0$ com $y_0 \neq 0$.

b) Pontos de equilíbrio: $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{(1-y)(y-2)}{y^2} = 0 \Rightarrow (1-y)(y-2) = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = 2$

parábola com concavidade "para baixo"




Logo, $y = 1$ é ponto de equilíbrio instável e $y = 2$ é ponto de equilíbrio estável.

c) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1-y)(y-2)}{y^2} \cdot \left(-\frac{3}{y^2} + \frac{4}{y^3}\right) = \frac{(1-y)(y-2)(-3y+4)}{y^5} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow y = 1, y = 2, y = \frac{4}{3}$. Mudança de concavidade ocorre quando as soluções passam por $y = \frac{4}{3}$. Como $y = 1$ e $y = 2$ são soluções constantes, sua concavidade é 0. Pelo TEU, tirando essas soluções de equilíbrio, nenhuma outra passa por $y = 1$ ou $y = 2$.