IEDO - 2017.2 - Prova 1 - Versão D

1) a) Significa dizer que existe uma função $\phi: I \to \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto tal que $x_0 = 0 \in I$, $\phi(0) = 1$ e $\phi'' - 3x^2\Phi' - 6x\Phi = 0$, ou seja, Φ satisfaz à condição inicial e satisfaz à EDO para todo $x \in I$.

b) Vamos testar: $\phi(x) = e^{x^3} \Rightarrow \phi'(x) = 3x^2 e^{x^3} \Rightarrow \phi''(x) = 6x \cdot e^{x^3} + 3x^2 \cdot 3x^2 \cdot e^{x^3} = 6xe^{x^3} + 9x^4 e^{x^3}$

Substituindo, $6xe^{x^3} + 9x^4e^{x^3} - 3x^2 \cdot (3x^2 e^{x^3}) - 6x \cdot e^{x^3} = 0$. $\Rightarrow$ satisfaz a EDO. Testando a condição inicial, temos $\phi(0) = e^0 = 1 \rightarrow$ satisfaz a condição inicial $\Rightarrow$ é solução do PVI.

2)

a) $y' - 2xy = (\cos x) \cdot e^{x^2}$, $y(0) = 3$.

Fator integrante: $\mu(x) = e^{\int(-2x)dx} = e^{-x^2} \Rightarrow e^{-x^2} \cdot (y' - 2xy) = e^{-x^2} \cdot (\cos x) \cdot e^{x^2}$. Assim,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} \cdot y\right) = \cos x \Rightarrow e^{-x^2} \cdot y = \int \cos x \, dx + C = \operatorname{sen} x + C \Rightarrow y(x) = (C + \operatorname{sen} x)\, e^{x^2}.$$

Como $y(0) = 3$, temos $y(0) = (C + \operatorname{sen} 0)e^0 = 3 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow \boxed{y(x) = (3 + \operatorname{sen} x) \cdot e^{x^2}}$

b) $y' = y \cdot (y-4) \cdot x^3$, $y(0) = -2$

EDO separável: $\dfrac{dy}{y \cdot (y-4)} = x^3 dx \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y \cdot (y-4)} = \int x^3 dx + C$; $\dfrac{1}{y(y-4)} = \dfrac{A}{y} + \dfrac{B}{y-4} = \dfrac{A \cdot (y-4) + B y}{y \cdot (y-4)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4B = 1 \\ -4A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{4} \\ A = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \int \left(-\frac{1}{4y} + \frac{1}{4(y-4)}\right) dy = \int x^3 dx + C \Rightarrow -\frac{1}{4}\ln|y| + \frac{1}{4}\ln|y-4| = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y-4}{y}\right| = x^4 + 4C \Rightarrow \left|\frac{y-4}{y}\right| = e^{4C} \cdot e^{x^4} \Rightarrow \frac{y-4}{y} = K \cdot e^{x^4} \Rightarrow y - 4 = y \cdot K \cdot e^{x^4}$$

$$\Rightarrow y\left(1 - Ke^{x^4}\right) = 4 \Rightarrow y(x) = \frac{4}{1 - Ke^{x^4}}; \; y(0) = -2 \Rightarrow y(0) = \frac{4}{1 - K \cdot e^0} = -2 \Rightarrow \frac{4}{1-K} = -2 \Rightarrow 1 - K = -2 \Rightarrow K = 3$$

$$\Rightarrow \cancel{y(x) = \frac{4}{1 - 3x^4}} \quad \boxed{y(x) = \frac{4}{1 - 3 \cdot e^{x^4}}}$$

c) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$; $y(1) = -1$. EDO homogénea. Fazendo a substituição $z = \frac{y}{x}$, (2)

temos $y = zx \Rightarrow y' = z'.x + z \Rightarrow z'.x + z = e^{z} + z \Rightarrow z'.x = e^{z} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{e^{z}}{x} \Rightarrow e^{-z}dz = \frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \int e^{-z}dz = \int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow -e^{-z} = \ln|x| + C \Rightarrow e^{-z} = -\ln|x| - C$

$\Rightarrow -z = \ln(-\ln|x| - C) \Rightarrow z = \frac{y}{x} = -\ln(-\ln|x| - C) \Rightarrow y(x) = -x.\ln(-\ln|x| - C).$

Como ~~y(x)~~ $y(1) = -1$, temos $y(1) = -1.\ln(-\ln|1| - C) = -1 \Rightarrow \ln(-\ln 1 - C) = 1 \Rightarrow \ln(-C) = 1$

$\Rightarrow -C = e \Rightarrow C = -e$. Logo,

$$\boxed{y(x) = -x\ln(e - \ln|x|)}$$

3) $\frac{dN}{dt} = -3 \Rightarrow N = N_0 e^{-3t}$; $N(3) = 60 \Rightarrow N_0.e^{-3.3} = 60 \Rightarrow N_0 = 60.e^{9} = 60.(e^{3})^{3}$.

Fazendo $e^{3} = 20$, temos $N_0 = 60.(20)^{3} = 60.2^{3}.10^{3} = 6.8.10^{4} = 48.10^{4} = \boxed{480\,000g}$

4) $\frac{dh}{dt} = 2 \Rightarrow h(t) = h_0 + 2t = 10 + 2t = 2(5+t)$

$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{(h(t))^2} \longrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{k}{4.(5+t)^2}$, sendo $x(0) = 0$ (pois ele parte de Arendelle) e $x(5) = 60\%.100 = 60$

$dx = \frac{k}{4.(5+t)^2}dt \Rightarrow x = \int \frac{k}{4(5+t)^2}dt = -\frac{k}{4(5+t)} + C \Rightarrow x(t) = \frac{-k}{4(5+t)} + C.$

$x(0) = 0 \Rightarrow -\frac{k}{4.5} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{k}{20} \Rightarrow x(t) = \frac{k}{20} - \frac{k}{4.(5+t)}$.

Como $x(5) = 60$, temos $\frac{k}{20} - \frac{k}{4.(5+5)} = 60 \Rightarrow \frac{k}{20} - \frac{k}{40} = \frac{k}{40} = 60 \Rightarrow k = 2400 \Rightarrow \boxed{x(t) = 120 - \frac{600}{5+t}}$

a) $x(t) = 100 \Rightarrow 100 = 120 - \frac{600}{5+t} \Rightarrow \frac{600}{5+t} = 20 \Rightarrow 30 = 5+t \Rightarrow \boxed{t = 25\text{ horas}}$

b) Interpretação 1: mantendo a equação $x(t) = 120 - \frac{600}{5+t}$, temos que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 120$ km. Logo, ele nunca chegaria.

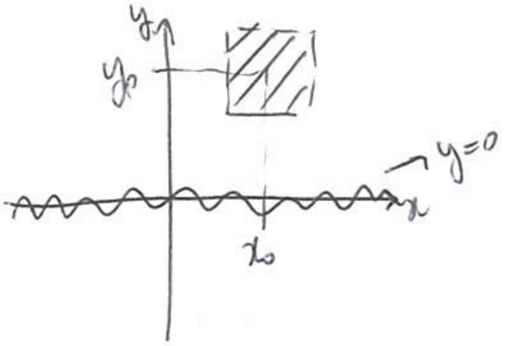
<u>Interpretação 2</u>: como a distância agora é 200km, podemos pensar que em 5 horas ele percorre 120km ao invés de 60km em 5 horas. Nesse caso, temos $x(5) = 120$.

Com isso, $x(5)=120 \Rightarrow \frac{k}{40} = 120 \Rightarrow k = 4800 \Rightarrow x(t) = 240 - \frac{1200}{5+t}$. Assim, temos

$$x(t) = 200 \Rightarrow 200 = 240 - \frac{1200}{5+t} \Rightarrow \frac{1200}{5+t} = 40 \Rightarrow 5+t = 30 \Rightarrow \boxed{t = 25 \text{ horas}}$$

5) $$\frac{dy}{dx} = \frac{(y-2)\cdot(y-3)}{y^2} = f(x,y) = \frac{y^2-3y-2y+6}{y^2} = 1 - \frac{5}{y} + \frac{6}{y^2}$$

a) Para aplicar o TEU, precisamos analisar $f(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Temos $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{5}{y^2} - \frac{12}{y^3}$. Tanto $f(x,y)$ como $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são funções racionais e, portanto, são contínuas em todos os pontos de seus domínios. Dessa forma, só não serão contínuas em $y=0$.

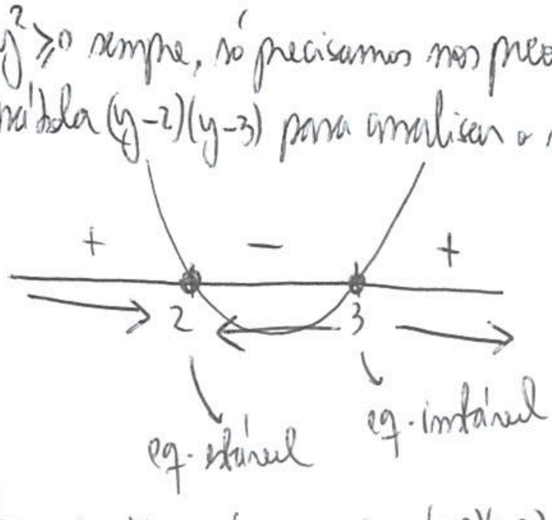


Dado qualquer ponto (x_0,y_0) com $y_0 \neq 0$, podemos desenhar um retângulo aberto em torno dele dentro do qual tanto f como $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas. Logo, podemos aplicar o TEU para qualquer condição inicial $y(x_0)=y_0$ com $y_0 \neq 0$.

b) Pontos de equilíbrio: $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \cancel{\frac{(1-y)\cdot(y-2)}{y^2}} = 0 \Rightarrow \cancel{(1-y)(y-2)}\ \frac{(y-2)(y-3)}{y^2} = 0 \Rightarrow y=2$ ou $y=3$

parábola com concavidade para cima.

como $y^2 \geq 0$ sempre, só precisamos nos preocupar com a parábola $(y-2)(y-3)$ para analisar o sinal de $\cancel{y}\ \frac{dy}{dx}$.



* Logo, $y=2$ é ponto de equilíbrio estável e $y=3$ é ponto de equilíbrio instável.

c) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y-2)(y-3)}{y^2}\cdot\left(\frac{5}{y^2} - \frac{12}{y^3}\right) = \frac{(y-2)(y-3)\cdot(5y-12)}{y^5} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow y=2 \text{ ou } y=3 \text{ ou } y=\frac{12}{5}$$

Mudança de concavidade ocorre quando as soluções passam por $\boxed{y = \frac{12}{5}}$