IEDO - Prova 2 - Versão B

1) $4y'' + 8y' + 5y = 0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

a) EDO linear homogênea com coeficientes constantes $\Rightarrow y(t) = e^{\lambda t}$

$\Rightarrow 4\lambda^2 + 8\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 64 - 4.4.5 = 64 - 80 = -16$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{-8 \pm 4i}{8} = -1 \pm \dfrac{1}{2} i \Rightarrow y(t) = e^{-t} e^{\pm\frac{1}{2}i.t}$

Em termos de senos e cossenos podemos escrever $y_1(t) = e^{-t}.\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ e $y_2(t) = e^{-t}.\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$

Logo, a solução geral é

$$y(t) = C_1.e^{-t}.\cos\left(\frac{t}{2}\right) + C_2.e^{-t}.\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$$

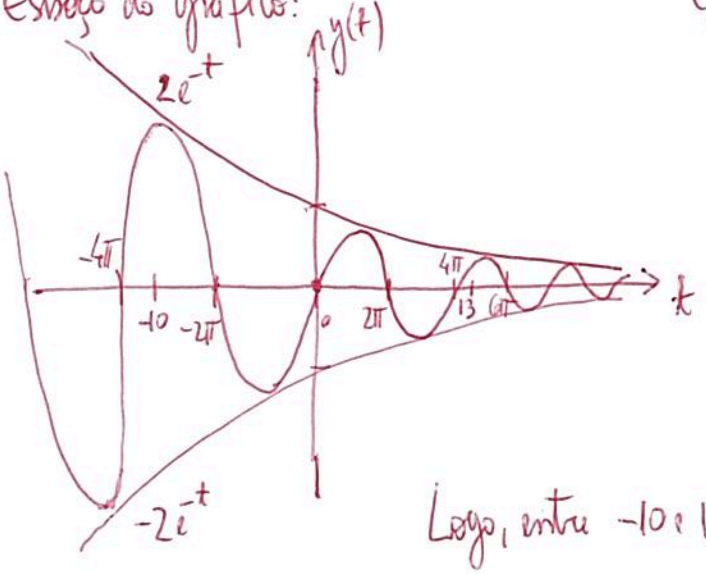
Usando as condições iniciais: $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow y(t) = C_2.e^{-t}.\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$

Portanto, $y'(t) = -C_2 e^{-t}.\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) + C_2.e^{-t}.\frac{1}{2}.\cos\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow y'(0) = \frac{C_2}{2}$. Como $y'(0) = 1$,

temos que $C_2 = 2$. A solução do PVI é então:

$$\boxed{y(t) = 2.e^{-t}.\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}$$

b) Esboço do gráfico:



c) $y(t) = 0$ quando $\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{t}{2} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Como $2\pi \approx 6{,}28$, $4\pi \approx 12{,}56$, e $6\pi \approx 18{,}84$,

temos que: ~~$4\pi < 13 < 6\pi$~~

$-4\pi < -10 < -2\pi < 0 < 2\pi < 4\pi < 13 < 6\pi$

Logo, entre -10 e 13, o gráfico intercepta o eixo horizontal 4 vezes.

2)

a) $t^2 . y'' - 2t(1+t)y' + 2(1+t)y = 0, \quad t > 0$

$y_1(t) = t$ é solução da EDO. Fazendo $y_2(t) = y_1(t).u(t)$, temos

$y_2(t) = t.u(t) \Rightarrow y_2'(t) = u + t.u' \Rightarrow y_2'' = u' + u' + t.u'' = 2u' + t.u''$

Substituindo na EDO, encontramos:

$$t^2.(2u' + t.u'') - 2t(1+t).(u + t.u') + 2.(1+t).t.u = 0$$

$$\Rightarrow u''.t^3 + u'.\left(2t^2 - 2t(1+t).t\right) + u.\left(-2t(1+t) + 2(1+t)t\right) = 0$$

$$\Rightarrow t^3.u'' + (2t^2 - 2t^2 - 2t^3)u' = 0 \Rightarrow t^3.u'' - 2t^3u' = 0 \Rightarrow u'' - 2u' = 0$$

Fazendo $u' = v$, temos $v' - 2v = 0 \Rightarrow v' = 2v \Rightarrow \frac{dv}{v} = 2dt \Rightarrow \ln|v| = 2t + K$

$$\Downarrow$$

$$v = C_1 e^{2t}$$

$\Rightarrow$ Como $u' = v$, temos que $u = \int v(t)dt = \int C_1 e^{2t} . dt = \frac{C_1 . e^{2t}}{2} + C_2$

Logo, $y_2(t) = \left(\frac{C_1}{2} e^{2t} + C_2\right).t$. Tomando $C_1 = 2$ e $C_2 = 0$, encontramos $\boxed{y_2(t) = t.e^{2t}}$

b) Calculando o Wronskiano entre y_1 e y_2, temos

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & te^{2t} \\ 1 & e^{2t} + 2te^{2t} \end{vmatrix} = t.e^{2t} + 2t^2e^{2t} - t.e^{2t} = 2t^2.e^{2t}$$

Como existe pelo menos um valor de t (por exemplo $t=1$) para o qual $W \neq 0$, concluimos que y_1 e y_2 são independentes.

③

3) a) $y'' - 2y' - 3y = 2\,\text{sen}\,t$

1º PASSO: EDO homogênea associada: $y'' - 2y' - 3y = 0$

$y = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4.1.(-3) = 16 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$

Logo, $y_h(t) = C_1 . e^{3t} + C_2 . e^{-t}$

2º PASSO: solução particular: $y_p(t) = A . \cos t + B . \text{sen}\,t$. Substituindo na EDO:

$y_p' = -A . \text{sen}\,t + B\cos t \Rightarrow y_p'' = -A . \cos t - B . \text{sen}\,t \Rightarrow$

$(-A . \cos t - B . \text{sen}\,t) - 2 . (-A\,\text{sen}\,t + B . \cos t) - 3 . (A\cos t + B . \text{sen}\,t) = 2\,\text{sen}\,t$

$\Rightarrow \cos t . (-A - 2B - 3A) + \text{sen}\,t . (-B + 2A - 3B - 2) = 0$

$\Rightarrow \cos t . (-4A - 2B) + \text{sen}\,t . (-4B + 2A - 2) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} -4A - 2B = 0 \\ -4B + 2A - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2A - B = 0 \Rightarrow B = -2A \\ -2B + A - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4A + A - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{5}} \Rightarrow \boxed{B = -\frac{2}{5}}$

Logo, a solução geral é $\boxed{y(t) = C_1 . e^{3t} + C_2 . e^{-t} + \frac{1}{5} . \cos t - \frac{2}{5} . \text{sen}\,t}$

b) $y'' + 3y' = 6$; 1º PASSO: EDO HOMOGÊNEA $y'' + 3y' = 0$

$y(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3 \Rightarrow y(t) = C_1 . e^{0} + C_2 . e^{-3t}$

$\Rightarrow y_h(t) = C_1 + C_2 . e^{-3t}$

2º PASSO: solução particular $y_p(t) = A . 1$. Como 1 é solução da EDO homogênea, tentamos $y_p(t) = t . A \Rightarrow y_p' = A \Rightarrow y_p'' = 0$. Substituindo:

$0 + 3 . A = 6 \Rightarrow A = 2 \Rightarrow y_p(t) = 2t$. Portanto, a solução geral é

$\boxed{y(t) = C_1 + C_2 . e^{-3t} + 2t}$

c) $y'' + 10y' + 25y = 2.e^{-5t}$

1º PASSO: Resolver EDO homogênea associada $y'' + 10y' + 25y = 0$

Se $y = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-10 \pm 0}{2} = -5 \Rightarrow y_1(t) = e^{-5t} \Rightarrow y_2(t) = t.e^{-5t}$

$\Delta = 100 - 4.1.25 = 0$

Logo, a solução geral é $y(t) = C_1.e^{-5t} + C_2.t.e^{-5t}$

2º PASSO: Solução particular: palpite $y_p(t) = Ae^{-5t} \rightarrow$ não funciona pois é solução da EDO homogên

Tentar $y_p(t) = \cancel{te^{-5t}}\ A.t.e^{-5t} \rightarrow$ não funciona pois é solução da EDO homogênea

$\Rightarrow$ Tentar $y_p(t) = A.t^2.e^{-5t} \Rightarrow y_p' = \cancel{A}\ 2Ate^{-5t} - 5At^2e^{-5t} \Rightarrow y_p'' = 2Ae^{-5t} - 10Ate^{-5t} - 10Ate^{-5t}$
$+ 25At^2e^{-5t}$. Substituindo na EDO temos:

$$25At^2e^{-5t} - 20Ate^{-5t} + 2Ae^{-5t} + 10(2Ate^{-5t} - 5At^2e^{-5t}) + 25.At^2e^{-5t} = 2.e^{-5t}$$

$$\Rightarrow t^2e^{-5t}.(\cancel{25A} - \cancel{50A} + 25A) + t.e^{-5t}.(\cancel{-20A} + \cancel{20A}) + e^{-5t}.(2A) = 2.e^{-5t} \Rightarrow 2A = 2 \Rightarrow A = 1$$

Logo, a solução geral da EDO é $\boxed{y(t) = C_1.e^{-5t} + C_2.t.e^{-5t} + t^2e^{-5t}}$

d) $y'' + 4y = \cancel{tg(2t)}\ \dfrac{1}{\cos(2t)} = \sec(2t)$

~~Forma~~ 1º PASSO: EDO HOMOGÊNEA $y'' + 4y = 0$. Se $y(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i \Rightarrow y(t) = e^{\pm 2i.t}$

$\Rightarrow y_1(t) = \cos(2t)$ e $y_2(t) = \text{sen}(2t)$. Logo, $y_h(t) = C_1.\cos(2t) + C_2.\text{sen}(2t)$

2º PASSO: VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS. $y_p(t) = u_1(t).\cos(2t) + u_2(t).\text{sen}(2t)$, sendo

$$u_1(t) = \int \frac{y_2(t).g(t)}{W(y_2,y_1)} = \int \frac{\text{sen}(2t).\overset{\sec}{\cancel{tg}}(2t)}{W(y_2,y_1)}\,dt \quad e \quad u_2(t) = \int \frac{y_1(t).g(t)}{W(y_1,y_2)}\,dt = \int \frac{\cos(2t).\overset{\sec}{\cancel{tg}}(2t)}{W(y_1,y_2)}\,dt$$

Mas $W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} \cos(2t) & \text{sen}(2t) \\ -2\text{sen}(2t) & 2\cos(2t) \end{vmatrix} = 2\cos^2(2t) + 2\text{sen}^2(2t) = 2$. Portanto,

$$u_1 = \int \left(\frac{-1}{2}\right).\text{sen}(2t).\frac{1}{\cos(2t)}\,dt \quad e \quad u_2 = \int \left(\frac{+1}{2}\right)\cos(2t).\frac{1}{\cos(2t)}\,dt$$

Portanto, $u_1 = -\frac{1}{2}\int \tan(2t)\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{sen}(2t)}{\cos(2t)}\,dt$; se $\cos(2t) = u$, temos

$du = -\operatorname{sen}(2t).2\,dt \Rightarrow \operatorname{sen}(2t)dt = -\frac{1}{2}.du$ e, portanto, $u_1 = -\frac{1}{2}\int\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{du}{u} = \frac{1}{4}\ln|u| + K_1$

Fazendo $K_1 = 0$, $u_1(t) = \frac{1}{4}\ln|\cos(2t)|$.

Além disso,

$$u_2 = \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2}.t + K_2.$$ Fazendo $K_2 = 0$, temos $u_2 = \frac{t}{2}$. Com isso,

$$y_p(t) = \frac{1}{4}\ln|\cos(2t)|.\cos(2t) + \frac{t}{2}.\operatorname{sen}(2t)$$

3º PASSO: Solução geral é $\boxed{y(t) = C_1.\cos(2t) + C_2.\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{4}.\cos(2t).\ln|\cos(2t)| + \frac{t}{2}.\operatorname{sen}(2t)}$

4) $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F_{ext} \Rightarrow \begin{cases} 2\ddot{x} + 2x = 4\cos t + 8\operatorname{sen} t \\ x(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = -1 \end{cases}$

b) Solução da EDO homogênea associada: $2\ddot{x} + 2x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + x = 0$. Fazendo $x(t) = e^{\lambda t}$, temos

$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \Rightarrow x(t) = e^{\pm i.t} \Rightarrow x_1(t) = \cos t$, $x_2(t) = \operatorname{sen} t$

$\Rightarrow x_h(t) = C_1.\cos t + C_2.\operatorname{sen} t$

Solução particular: palpite $x_p(t) = A.\cos t + B.\operatorname{sen} t \rightarrow$ não ~~serve~~ serve pois é solução da EDO homogênea $\Rightarrow$ tentar $x_p(t) = t.(A\cos t + B.\operatorname{sen} t) \Rightarrow x_p'(t) = 1.(A\cos t + B.\operatorname{sen} t) + t.(-A\operatorname{sen} t + B.\cos t)$

$\Rightarrow x_p'' = -A.\operatorname{sen} t + B.\cos t + 1.(-A\operatorname{sen} t + B.\cos t) + t(-A.\cos t - B\operatorname{sen} t) = -2A\operatorname{sen} t + 2B.\cos t - At\cos t - Bt\operatorname{sen} t$

Substituindo na EDO:

$2.(-2A\operatorname{sen} t + 2B\cos t - \cancel{At\cos t} - \cancel{Bt\operatorname{sen} t}) + 2.t.(\cancel{A\cos t} + \cancel{B\operatorname{sen} t}) = 4\cos t + 8\operatorname{sen} t$

$\Rightarrow (-4A - 8)\operatorname{sen} t + (4B - 4)\cos t = 0 \Rightarrow \begin{cases} -4A - 8 = 0 \Rightarrow A = -2 \\ 4B - 4 = 0 \Rightarrow B = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = C_1.\cos t + C_2.\operatorname{sen} t - 2t\cos t + t.\operatorname{sen} t}$

Aplicando as condições iniciais temos

$x(0) = C_1 = 2$

$x'(t) = -C_1 \cdot \operatorname{sen} t + C_2 \cdot \cos t - 2\cos t + 2t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t + t\cos t \Rightarrow x'(0) = C_2 - 2 = -1 \Rightarrow C_2 = 1$

Logo, $\boxed{x(t) = 2\cos t + \operatorname{sen} t - 2t\cos t + t\operatorname{sen} t}$