IEDO - Prova 2 - Versão C

1) a) EDO linear homogênea $\to$ tentar $y = e^{\lambda t} \Rightarrow 4\lambda^2 - 8\lambda + 5 = 0$

$$\Delta = 64 - 4.4.5 = 64 - 80 = -16$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{8 \pm 4i}{8} = 1 \pm \frac{i}{2} \Rightarrow y(t) = e^t . e^{\pm \frac{i}{2} t}$$

$$\nearrow y_1(t) = e^t . \cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\searrow y_2(t) = e^t . \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$$

Portanto, a solução geral é:

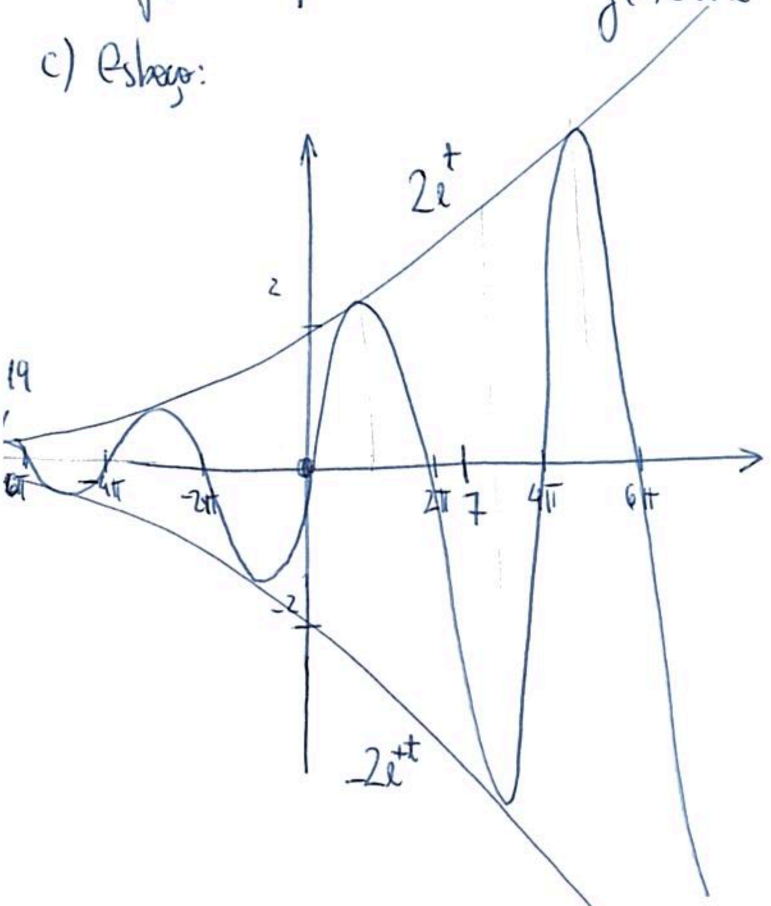
$$\boxed{y(t) = C_1 . e^t . \cos\left(\frac{t}{2}\right) + C_2 . e^t . \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}$$

b) $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 . e^0 . \cos(0) + C_2 . e^0 . \operatorname{sen}(0) = C_1 = 0 \Rightarrow y(t) = C_2 . e^t . \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$

$y'(t) = C_2 . e^t . \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) + C_2 . e^t . \frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)$; $y'(0) = 1 \Rightarrow \frac{C_2}{2} = 1 \Rightarrow C_2 = 2$

Logo, a solução do PVI é $y(t) = 2e^t \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$.

c) Esboço:



d) Queremos saber quantas vezes $y(t) = 0$ no intervalo $(-19, 7)$. Ou seja, quantas vezes $\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) = 0$ nesse intervalo.

$\frac{t}{2} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$2\pi \approx 6{,}28$
$4\pi \approx 12{,}56$
$6\pi \approx 18{,}84$

$\Rightarrow -19 < -6\pi < -4\pi < -2\pi < 0 < 2\pi < 7$

$\Rightarrow$ 5 valores entre $(-19, 7)$ para os quais $y(t) = 0$.

$\Downarrow$

$\boxed{\text{Intercepta 5 vezes}}$

2) $ty'' + (1-2t)y' + (t-1)y = 0, \quad t>0$

a) $y_1 = e^t$. Redução de ordem: $y_2 = e^t \cdot u(t) \Rightarrow y_2' = e^t \cdot u + e^t \cdot u' \Rightarrow y_2'' = e^t u' + e^t u + e^t u' + e^t u''$

$\Rightarrow y_2'' = e^t u'' + 2e^t u' + e^t \cdot u$. Substituindo na EDO:

$$t \cdot (\cancel{e^t} u'' + 2\cancel{e^t} u' + \cancel{e^t} \cdot u) + (1-2t) \cdot (\cancel{e^t} \cdot u + \cancel{e^t} \cdot u') + (t-1) \cdot \cancel{e^t} \cdot u = 0$$

$$\Rightarrow t \cdot u'' + (2t + (1-2t))u' + (t \cdot u + (1-2t)u + (t-1)u) = 0$$

$\Rightarrow tu'' + u' = 0$. Se $u' = v$, temos $t \cdot v' + v = 0 \Rightarrow t \cdot v' = -v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{1}{t} dt$

$$\Rightarrow \ln|v| = -\ln|t| + k_1 \Rightarrow v = \frac{C_1}{t} \Rightarrow u' = v \Rightarrow u = \int v \, dt = C_1 \cdot \ln t + C_2.$$

Fazendo $C_1 = 1$ e $C_2 = 0$, temos $\boxed{y_2(t) = e^t \cdot \ln t}$

b) $$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & e^t \cdot \ln t \\ e^t & e^t \cdot \ln t + \frac{e^t}{t} \end{vmatrix} = e^{2t} \ln t + \frac{e^{2t}}{t} - e^{2t} \ln t = \frac{e^{2t}}{t}.$$

Como existe pelo menos um valor de t (por exemplo $t=1$) para o qual $W \neq 0$, concluímos que as funções são linearmente independentes.

3) a) 1º PASSO: EDO homogênea $y'' - 2y' - 3y = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm 4}{2}$ $\nearrow \lambda_1 = 3$, $\searrow \lambda_2 = -1$

$\Rightarrow y_h(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$

2º PASSO: solução particular - coeficientes indeterminados: palpite $y_p(t) = A \cdot \cos t + B \cdot \operatorname{sen} t$

$\Rightarrow y_p'(t) = -A \operatorname{sen} t + B \cdot \cos t \Rightarrow y_p''(t) = -A \cos t - B \operatorname{sen} t$. Substituindo na EDO:

$$-A\cos t - B \operatorname{sen} t - 2(-A \operatorname{sen} t + B \cos t) - 3 \cdot (A \cos t + B \operatorname{sen} t) = -2\cos t$$

$$\Rightarrow \cos t(-A - 2B - 3A + 2) + \operatorname{sen} t \cdot (-B + 2A - 3B) = 0$$

Temos, portanto $\begin{cases} -4A-2B+2=0 \\ 2A-4B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A+B=1 \\ A=2B \end{cases} \Rightarrow 5B=1 \Rightarrow B=\frac{1}{5} \Rightarrow A=\frac{2}{5}$

Logo, $y_p(t)=\frac{2}{5}\cos t+\frac{1}{5}\operatorname{sen} t$

3º PASSO: solução geral: $y(t)=y_h(t)+y_p(t)=\boxed{C_1 e^{2t}+C_2.e^{-t}+\frac{2}{5}\cos t+\frac{1}{5}\operatorname{sen} t}$

b) 1º PASSO: EDO homogênea $y''-4y'=0 \Rightarrow \Delta=\lambda^2-4\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-4)=0 \to \lambda_1=0,\ \lambda_2=4 \Rightarrow y_h(t)=C_1+C_2.e^{4t}$

2º PASSO: SOLUÇÃO PARTICULAR - coeficientes indeterminados.

Palpite $y_p(t)=A \to$ não funciona pois $A=$ constante é solução da EDO homogênea

$\Rightarrow$ tentar $y_p(t)=t.A \Rightarrow y_p'=A \Rightarrow y_p''=0$. Substituindo na EDO, temos

$$0-4.A=8 \Rightarrow A=-2 \Rightarrow y_p(t)=-2$$

3º PASSO: solução geral: $\boxed{y(t)=y_h(t)+y_p(t)=C_1+C_2e^{4t}-2}$

c) 1º PASSO: EDO homogênea: $y''+8y'+16=0 \Rightarrow \lambda^2+8\lambda+16=0 \Rightarrow \Delta=64-4.1.16=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-8\pm 0}{2}=-4$

$\Rightarrow y_1(t)=e^{-4t}$ e $y_2(t)=t.e^{-4t} \Rightarrow y_h(t)=C_1.e^{-4t}+C_2.t.e^{-4t}$

2º PASSO: solução particular - coeficientes indeterminados - palpite $y_p(t)=A.e^{-4t} \to$ não funciona pois é solução da EDO homogênea

$\to$ palpite $y_p=t.(A.e^{-4t}) \to$ não funciona pois é solução da EDO homogênea $\to$ palpite $y_p(t)=t^2.A.e^{-4t} \to$ funciona

$y_p'=2At.e^{-4t}+At^2e^{-4t}.(-4) \Rightarrow y_p''=2Ae^{-4t}-8Ate^{-4t}-8Ate^{-4t}+16At^2e^{-4t}=2Ae^{-4t}-16Ate^{-4t}+16At^2e^{-4t}$

Substituindo na EDO: $2A\cancel{e^{-4t}}-16At\cancel{e^{-4t}}+16At^2\cancel{e^{-4t}}+8(2At\cancel{e^{-4t}}-4At^2\cancel{e^{-4t}})+16At^2\cancel{e^{-4t}}=4\cancel{e^{-4t}}$

$\Rightarrow (2A-4)+(-16At+16At)+(16At^2-32At^2+16At^2)=0 \Rightarrow A=2 \Rightarrow y_p(t)=2t^2e^{-4t}$

3º PASSO) Solução geral: $\boxed{y(t)=y_h(t)+y_p(t)=C_1.e^{-4t}+C_2.t.e^{-4t}+2t^2.e^{-4t}}$

d) 1º PASSO: EDO homogênea $y'' + 9y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 3i$

$\Rightarrow y_h(t) = C_1 . \cos(3t) + C_2 . \operatorname{sen}(3t)$

2º PASSO: solução particular → variação dos parâmetros $y_p(t) = u_1(t) . \underset{y_1(t)}{\underbrace{\cos(3t)}} + u_2 . \underset{y_2(t)}{\underbrace{\operatorname{sen}(3t)}}$; $g(t) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(3t)}$

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(3t) & \operatorname{sen}(3t) \\ -3\operatorname{sen}(3t) & 3\cos(3t) \end{vmatrix} = 3\cos^2(3t) + 3\operatorname{sen}^2(3t) = 3$$

$$\Rightarrow u_1(t) = \int \frac{y_2(t) . g(t)}{W[y_2, y_1](t)} dt = \int \frac{\operatorname{sen}(3t)}{-3} . \frac{1}{\operatorname{sen}(3t)} dt = \int -\frac{1}{3} dt = -\frac{t}{3} + K_1$$

$$\Rightarrow u_2(t) = \int \frac{y_1(t)\, g(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt = \int \frac{\cos(3t)}{3} . \frac{1}{\operatorname{sen}(3t)} dt = \frac{1}{3} \int \frac{\cos(3t)}{\operatorname{sen}(3t)} dt \text{ ; Fazendo } z = \operatorname{sen}(3t), \; dz = 3 . \cos(3t)\, dt$$

$$\Rightarrow u_2(t) = \frac{1}{3} \int \frac{1}{3} \frac{dz}{z} = \frac{1}{9} \ln|z| + K_2 = \frac{1}{9} \ln|\operatorname{sen}(3t)| + K_2$$

Fazendo $K_1 = K_2 = 0$, temos $y_p(t) = -\dfrac{t}{3} . \cos(3t) + \dfrac{1}{9} \operatorname{sen}(3t) . \ln|\operatorname{sen}(3t)|$

3º PASSO: solução geral:

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 . \cos(3t) + C_2 . \operatorname{sen}(3t) - \frac{t}{3} . \cos(3t) + \frac{1}{9} \operatorname{sen}(3t) \ln|\operatorname{sen}(3t)|}$$

4) $k = 3\,N/m$, $m = 3\,kg$, $F_{ext}(t) = -6\cos t + 9\operatorname{sen} t$, $\gamma = 0$

a) $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F_{ext}(t) \Rightarrow \boxed{3\ddot{x} + 3x = -6\cos t + 9\operatorname{sen} t, \; x(0) = -1, \; \dot{x}(0) = 2}$ PVI

b) 1º PASSO: EDO homogênea: $3\ddot{x} + 3x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + x = 0$; tentar $x(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$

$\Rightarrow x_1(t) = \cos t$, $x_2(t) = \operatorname{sen} t \Rightarrow x_h(t) = C_1 . \cos t + C_2 . \operatorname{sen} t$

2º PASSO: solução particular → coeficientes indeterminados → palpite $x_p(t) = A . \cos t + B . \operatorname{sen} t$

→ não funciona pois é solução da EDO homogênea $\Rightarrow$ tentar $x_p(t) = t . (A\cos t + B\operatorname{sen} t) \Rightarrow \dot{x}_p = A\cos t + B\operatorname{sen} t + t(-A\operatorname{sen} t + B\cos t)$

$\Rightarrow \ddot{x}_p = -A\operatorname{sen} t + B\cos t + (-A\operatorname{sen} t + B\cos t) + t(-A\cos t - B\operatorname{sen} t) = -2A\operatorname{sen} t + 2B\cos t - At\cos t - Bt\operatorname{sen} t$

$\Rightarrow$

Substituindo na EDO:

$$3\ddot{x} + 3x = -6\cos t + 9\,\text{sen}\,t \Rightarrow \ddot{x} + x = -2\cos t + 3\,\text{sen}\,t$$

$$\Rightarrow -2A\,\text{sen}\,t + 2B\cos t \cancel{- At\cos t} \cancel{- Bt\,\text{sen}\,t} + \cancel{At\cos t} + \cancel{Bt\,\text{sen}\,t} = -2\cos t + 3\,\text{sen}\,t$$

$$\Rightarrow (-2A - 3)\,\text{sen}\,t + (2B + 2)\cos t = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2A - 3 = 0 \Rightarrow A = -\dfrac{3}{2} \\ 2B + 2 = 0 \Rightarrow B = -1 \end{cases} \Rightarrow x_p(t) = -\frac{3}{2}t\cos t - 1t\,\text{sen}\,t$$

3º PASSO) solução geral $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 \cdot \cos t + C_2 \cdot \text{sen}\,t - \frac{3}{2}t\cos t - t\,\text{sen}\,t$

4º PASSO) Aplicar as condições iniciais:

$$x(0) = C_1 = -1$$

$$\dot{x}(t) = -C_1\,\text{sen}\,t + C_2 \cdot \cos t - \frac{3}{2}\cos t + \frac{3}{2}t\,\text{sen}\,t - \text{sen}\,t - t\cos t$$

$$\dot{x}(0) = C_2 - \frac{3}{2} = 2 \Rightarrow C_2 = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = -\cos t + \frac{7}{2}\,\text{sen}\,t - \frac{3}{2}t\cos t - t \cdot \text{sen}\,t}$$