Lista 1 - FIS 404 - Relatividade Geral

Relatividade especial

2° quadrimestre de 2017 - Professor Maurício Richartz

Leitura sugerida: Caroll (1.1-1.3), Wald (cap. 1), Schutz (cap. 1)
Fonte dos exercícios: Caroll, Wald, Schutz, e curso de RG da Caltech.

1. **Unidades Naturais:** Unidades naturais (ou geometrizadas) são unidades nas quais a velocidade da luz $c = 2,99792458000000000000000 \times 10^8$m/s e a constante de Newton G são definidas como sendo 1, i.e. $c = G = 1$. Se, além disso, se também fizermos a constante de Planck ser 1, i.e. $\hbar = 1$, as unidades são chamadas unidades de Planck.

   a) Como os físicos experimentais mediram a velocidade da luz com a imensa precisão indicada acima? Quais são os próximos dígitos no valor de c?

   b) Quanto é um ano, expresso em metros?

   c) Qual é a sua idade, em metros?

   d) Qual é a sua altura, em segundos?

   e) Relacione as constantes c, G, e $\hbar$ para obter quantidades que tem, respectivamente, dimensões de comprimento, de tempo, e de energia. Essas quantidades são chamadas, respectivamente, de comprimento de Planck, tempo de Planck, e energia de Planck.

   f) As seguintes unidades estão escritas em unidades em que $c = 1$. Recupere os fatores de c para que elas estejam no sistema internacional (SI).

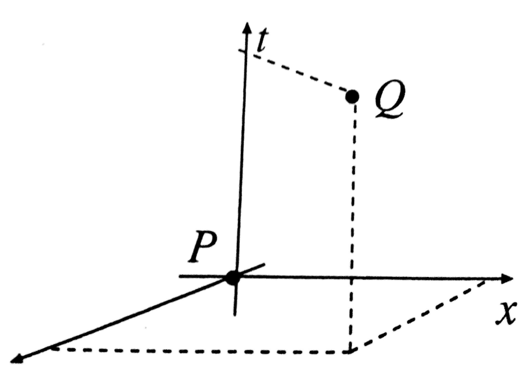
      f.1) velocidade $= 10$.

      f.2) pressão $= 10^{19}\,\mathrm{kg/m^3}$.

      f.3) densidade de energia $= 1\,\mathrm{kg/m^3}$.

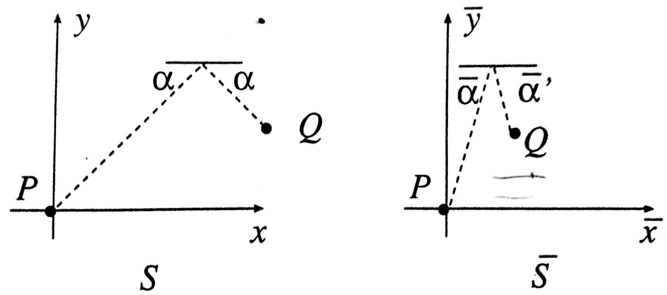
      f.4) aceleração $= 10\,\mathrm{m^{-1}}$.

2. **Invariância de um intervalo tipo-tempo:** considere dois eventos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ que tem separação tipo-tempo. Examine esses eventos em dois referenciais inerciais distintos S e $\overline{S}$, que se movem com velocidade constante v relativa entre si. Considere que as origens dos sistemas de coordenadas coincidem entre si e com o evento $\mathcal{P}$. Oriente os eixos espaciais dos dois referenciais de modo que seu movimento relativo seja na direção x e de modo que $\mathcal{Q}$ esteja no plano xy. A figura abaixo ilustra o diagrama de espaço tempo a partir do ponto de vista do referencial S:



a) Se convença de que, dados quaisquer $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, as origens e os eixos dos referenciais podem ser ajustados como descrito acima.

O experimento imaginário a seguir mostra como se deduzir a invariância do intervalo entre $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$. O experimento é ilustrado abaixo em dois diagramas puramente espaciais (um para cada referencial, a coordenada temporal é omitida).



Considere um fóton (pulso luminoso) que é emitido em $\mathcal{P}$, e viaja ao longo de de uma linha reta no plano xy até encontrar um espelho que o reflete; o fóton então continua em linha reta, no plano xy, até atingir o evento $\mathcal{Q}$. A posição do espelho é ajustada de modo que o fóton atinge a posição espacial de $\mathcal{Q}$ exatamente no tempo de $\mathcal{Q}$. No referencial S a direção de movimento do fóton faz um ângulo α com o eixo x, que é o mesmo antes e depois da reflexão (ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão). Sem usar as transformações de Lorentz, queremos usar apenas os postulados da Relatividade Especial para deduzir a invariância do intervalo.

b) Use o princípio da relatividade para mostrar que as alturas dos pontos de reflexão coincidem nos dois referenciais, i.e. $y_{\text{refl}} = \overline{y}_{\text{refl}}$, e que os ângulos de incidência e reflexão são iguais no referencial $\overline{S}$, i.e. $\overline{\alpha}_{\text{inc}} = \overline{\alpha}_{\text{ref}}$.

c) Use o princípio da relatividade, a constância da velocidade da luz, e considerações geométricas simples para mostrar que o intervalo entre $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ é o mesmo, independentemente de qual referencial é usado para calculá-lo, i.e. que

$$-(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = -(\Delta \overline{t})^2 + (\Delta \overline{x})^2 + (\Delta \overline{y})^2 + (\Delta \overline{z})^2$$

3. **Transformações de Lorentz:** falamos em sala sobre o grupo de Poincaré e as transformações de coordenadas que deixam o intervalo do espaço-tempo invariante. Partindo da invariância do intervalos, vamos deduzir as transformações de Lorentz. Considere dois referenciais inerciais, S, com as coordenadas (t, x, y, z), e S', com as coordenadas (t', x', y', z').

a) **Translações:** mostre que qualquer translação (espacial ou temporal) deixa o intervalo invariante.

b) **Rotações:** mostre que qualquer rotação (espacial, nos planos xy, xz ou yz) deixa o intervalo invariante.

c) **"Boosts":** assuma que os referenciais S e S' estão orientados como no exercício 2, isto é, que foram feitas translações e rotações espaciais de modo que $y = y'$ e $z = z'$. Em vista disso, apenas as coordenadas x e t se misturam. Assumindo que a transformação é linear, isto é, que

$$x = Ax' + Bt', \qquad t = Ct' + Dx',$$

use a invariância do intervalo para encontrar A, B, C, e D em termos de v.

4. **Diagramas de espaço-tempo:** considere dois referenciais inerciais S e S' cujas origens coincidem e que se movem com velocidade V ao longo da direção x (mais precisamente, que estão orientados como no exercício 2). Dado o diagrama de espaço-tempo do ponto de vista do referencial S (i.e., o plano xt), desenhe os eixos x' e t' do referencial S'.

   a) Eventos simultâneos no referencial S não são simultâneos em S'. Desenhe uma superfície de simultaneidade em S e mostre no diagrama qual é a cronologia desses eventos em S', i.e., quais ocorrem antes e quais ocorrem depois.

   b) Uma régua, em repouso no referencial S, quando observada no referencial S', parece ser menor por um certo fator. Usando a geometria do diagrama, mostre que esse fator é dado por $\sqrt{1-v^2}$.

   c) Um relógio ideal em repouso no referencial S, quando observado no referencial S', parece marcar o tempo de forma mais lenta. Usando a geometria do diagrama, mostre que esse fator de lentidão é $\sqrt{1-v^2}$.

5. **Diagramas de espaço-tempo (parte 2):** um físico experimental em um referencial inercial S faz o seguinte experimento: dois feixes de partículas com velocidade $v = 0.5$ cada são emitidos a partir de $x = 0$ e $t = -200cm$, sendo que um viaja na direção $+x$ e outro viaja na direção $-x$. As partículas encontram detectores localizados em $x = \pm 200cm$. Passado um intervalo de tempo de $50cm$ após as detecções, os detectores enviam sinais de volta a $x = 0$ com velocidade $v = 0.75$.

   a) Faça um diagrama de espaço-tempo desse experimento usando as coordenadas de S.

   b) Os sinais chegam de volta a $x = 0$ no mesmo evento (certifique-se de que isso ocorre no seu diagrama). A partir disso e sabendo que os detectores estão a distâncias iguais de $x = 0$, o experimentalista conclui que os detectores enviaram seus sinais simultaneamente. Considere um observador num referencial S' que se move com velocidade $v = 0.75$ na direção $+x$ relativa a S. Desenhe os eixos coordenados no diagrama do item a. Em seguida, em um novo diagrama, represente o experimento no ponto de vista do referencial S'. Use esse diagrama para deduzir se os detectores, de acordo com o observador em S', enviam seus sinais simultaneamente. Em caso negativo, diga qual detector envia o sinal primeiro e quanto tempo antes o sinal é enviado.

   c) Calcule o intervalo Δs^2 entre os eventos nos quais os detectores emitem seus sinais, usando tanto as coordenadas de S como as coordenadas de S'.

6. **Quadrivelocidade:** a quadrivelocidade é definida como sendo $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, onde τ é o tempo próprio. Da mesma maneira que o intervalo do espaço-tempo é invariante, a quantidade

$$\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$$

   também é invariante.

   a) Mostre que essa quantidade é igual a -1 e use a sua invariância para mostrar que $u^\mu = \gamma(1, \vec{V})$, onde $\vec{V} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$.

b) Suponha que dois referenciais S_1 e S_2 se movem respectivamente com velocidades $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ com respeito a um referencial inercial. Usando o item a, mostre que a velocidade relativa $\vec{v}$ entre eles possui valor absoluto:

$$|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{|\vec{v_1} - \vec{v_2}|^2 - |\vec{v_1} \times \vec{v_2}|^2}{|1 - \vec{v_1} \cdot \vec{v_2}|^2}.$$

7. **Paradoxo dos gêmeos:** Diana e Artemis são irmãos (não-humanos) e vivem no planeta Alfa (que é assumido como sendo um referencial inercial). Após uma discussão, Artemis decide deixar sua irmã sozinha e partir em seu foguete para uma viagem em linha reta, por 2.2×10^8s (≈ 7 anos), a uma velocidade de $24c/25 = 0.96c$. Ele então, arrependido da viagem e com saudades da irmã, instantanemanete reverte a direção de seu movimento (por ser alienígena, seu corpo não sente os efeitos dessa aceleração infinita) e volta ao planeta Alfa para reencontrar a irmã.

   a) É comum enunciar essa situação como um paradoxo, o paradoxo dos gêmeos, que apresenta dois pontos de vista contraditórios. Em um deles, Diana envelhece mais durante a viagem do irmão, enquanto no outro é Artemis quem envelhecce mais. Enuncie o paradoxo dos gêmeos, mostrando os dois pontos de vista.
   b) Represente essa situação em um diagrama de espaço tempo usando o referencial do planeta Alfa.
   c) Represente essa situação em um diagrama de espaço tempo usando o referencial do foguete (i.e., o referencial no qual o foguete está sempre em repouso). Esse referencial é inercial?
   d) Represente essa situação em um diagrama de espaço tempo usando um referencial inercial que se afasta da Terra, na mesma direção da viagem de Artemis, com velocidade $0.96c$.
   e) Represente essa situação em um diagrama de espaço tempo usando um referencial inercial que se aproxima da Terra, na mesma direção da viagem de Artemis, com velocidade $0.96c$.
   f) Utilizando os diagramas feitos nos itens anteriores, esclareça o paradoxo, isto é, determine quem envelhece mais, explicando porque um dos pontos de vista está correto e o outro está incorreto.

8. **Paradoxo da vara e do celeiro (ou do carro e da garagem):** uma vara de $20m$ de comprimento repousa ao lado de um celeiro de $15m$ de comprimento. Um atleta olímpico pega a vara e corre em direção ao celeiro com velocidade $0.8c$. Seu amigo permance em repouso, observando tudo ao lado da entrada do celeiro.

   a) Qual é o comprimento da vara, observada pelo amigo, a medida em que ela se aproxima da entrada do celeiro. Em um das extremidades, o celeiro tem um porta de entrada, enquanto na outra extremidade há uma parede.
   b) A porta do celeiro está inicialmente aberta e, imediatamente após o corredor e a barra estarem inteiramente em seu interior, a porta é fechada. Quanto tempo depois disso a vara atinge a outra extremidade (parede) do celeiro, de acordo com o amigo? Calcule também o intervalo entre os eventos de fechar a porta e acertar a parede do celeiro. É tipo-tempo, tipo-espaço, ou tipo-luz?
   c) No referencial do corredor, qual o comprimento da barra e qual o comprimento do celeiro?
   d) Para o corredor, a barra está inteiramente dentro do celeiro quando atinge a parede?

e) Depois da colisão com a parede, a vara e o corredor permanecem em repouso em relação ao celeiro. Do ponto de vista do amigo, que fechou a porta, temos uma vara de $20m$ dentro de um celeiro de $15m$, uma vez que a porta foi fechada no primeiro momento em que ambos estavam no interior do celeiro, anets da colisão. Como isso é possível? Alternativamente, de acordo com o ponto de vista do corredor, a colisão deveria ter parado a vara antes de a porta ter sido fechada e, portanto, a porta não deveria ter sido fechada. A porta foi ou não fechada com a vara dentro do celeiro? Esse é o paradoxo. Para esclarecê-lo, desenhe dois diagramas de espaço tempo de toda essa situação, sendo um para o referencial do corredor e outro para o referencial do amigo.

9. **Composição de velocidades:** Um carrinho (suficientemente longo) se move com velocidade $\vec{v}$ sore uma mesa (também suficientemente longa). Um segundo carrinho (um pouco menor que o primeiro), localizado sobre o primeiro, se move na mesma direção do primeiro com velocidade $\vec{v}$ em relação a ele. Um terceiro carrinho, em cima do segundo, se move com velocidade $\vec{v}$ e relação a este, e assim por diante até o n-ésimo carrinho. Determine a velocidade v_n do n-ésimo carrinho em relação ao referencial de repouso da mesa. Calcule o limite $\lim_{n\to\infty} v_n$.

10. **Transformação de ângulos:** Um referencial S' se move com velocidade $\vec{v}$ em relação ao referencial S. Um projétil no referencial S' é disparado com velocidade $\vec{v'}$ e fazendo um ângulo θ' com respeito à direção positiva do movimento do referencial S' em relação a S. **a)** Qual é o ângulo θ medido no referencial S? **b)** Qual seria o ângulo θ se, ao invés de um projétil tivéssemos um fóton?

Resposta a) $$\cos\theta = \frac{v + v'\cos\theta'}{\sqrt{(1+vv'\cos\theta')^2 - (1-v^2)(1-v'^2)}}, \quad \tan\theta = \tan\theta' \frac{\sqrt{1-v^2}}{1+\frac{v}{v'\cos\theta'}}$$

Resposta b) $$\cos\theta = \frac{v+\cos\theta'}{1+v\cos\theta'}, \quad \tan\theta = \tan\theta' \frac{\sqrt{1-v^2}}{1+v\sec\theta'}$$

11. **Distribuição de estrelas:** Suponha que um observador em repouso com respeito às estrelas distantes observa uma distribuição isotrópica de estrelas. Isto é, em qualquer ângulo sólido $d\Omega$ ele observa $dN = (N/4\pi)d\Omega$ estrelas, onde N é o número total de estrelas que ele consegue observar. Suponha que um outro observador se move com velocidade $\vec{v}$ (possivelmente próxima à velocidade da luz) em relação ao referencial das estrelas fixas. Você vai precisar da resposta do exercicio **10b** (com algumas modificações, pois θ e θ' não são exatamente os mesmos ângulos que aparecem no exercício 10b) para resolver esse problema. Lembre-se também que $d\Omega = \mathrm{sen}\,\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi = \mathrm{d}(\cos\theta)\mathrm{d}\phi$.

   a) Qual é a distribuição de estrelas vista por esse observador em movimento? Em outras palavras, qual a função de distribuição $P(\theta', \phi')$ tal que o número de estrelas vistas por esse observador em seu ângulo sólido $d\Omega'$ é $P(\theta', \phi')d\Omega'$?

   b) Verifique que o número total de estrelas observadas é invariante, isto é, que $\int P(\theta', \phi')d\Omega' = N$. Verifique também que $\lim_{|\vec{v}|\to 0} P(\theta', \phi') = N/4\pi$.

   c) Ao calcular $P(\theta', \phi')$, você verificou que a distribuição não é isotrópica no referencial S. Em qual porção do espaço o observador em S' encontrará a maior parte das estrelas?