Lista 2 - FIS 404 - Relatividade Geral

Variedades, vetores, covetores, e tensores.

2° quadrimestre de 2017 - Professor Maurício Richartz

Leitura sugerida: Caroll (1.4-1.7,2.1-2.5,2.8-2.10), Wald (cap. 2).
Fonte dos exercícios: Caroll, Wald, e alguns livros de variedades diferenciáveis (Lee, Tu).

1. **Variedades:**

a) O fato de uma variedade ter uma topologia não-plana não significa necessariamente que ela não pode ser coberta com apenas uma carta. Em contraste ao círculo S^1 que vimos em sala, mostre que o cilindro infinito (i.e. o conjunto $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1$) pode ser coberto com apenas uma carta. Para fazer isso, construa explicitamente essa carta.

b) Mostre que o toro 2-dimensional, $\mathbb{T}^2$, é uma variedade. Para fazer isso, construa explicitamente um atlas. **Comentário:** existem duas maneiras de fazer isso. A primeira é pensar no toro como o conjunto $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Com isso, podemos usar as cartas que contruimos em sala para $\mathbb{S}^1$ para encontrar cartas para $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$. (Na verdade, existe um resultado bem geral, que diz que se M e N são variedades, então $M \times N$ também é variedade - se precisar, olhe a demonstração desse resultado para ter uma ideia de como construir cartas para $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ a partir das cartas de $\mathbb{S}^1$). A segunda maneira é pensar na toro como a superfície 2-dimensional definida por $\mathbb{T}^2 = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \left(c - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = a^2\}$, onde a e c são constantes. Nesse caso, faço um esboço do toro para entender o que representam as constantes a e c.

c) Existem diversas maneiras de se definir uma variedade orientável. Uma maneira conveniente para nós é através dos atlas orientados. Seja (U_α, ψ_α) um conjunto de cartas que formam um atlas para uma variedade M. Dizemos que esse atlas é orientado quando a matriz jacobiana associada às funções de transição $\psi_\alpha\psi_\beta^{-1}$ (i.e. as funções mudança de coordenadas) tem sempre determinante positivo para quaisquer α e β sempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Em outras palavras, se $y^i(x^j)$ são funções de transição, então det $\left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right] > 0$ para qualquer ponto $(x^1, \ldots, x^n)$ que está no domínio da função de transição. Uma variedade M é dita orientável se e somente se possui um atlas orientado. A partir dessa definição, mostre que o toro $\mathbb{T}^2$ do item **b** é uma variedade orientável.

d) Alterando um pouco as definições de uma variedade diferenciável, podemos definir uma variedade diferenciável com fronteira. Variedades com fronteira tem diversas utilidades. Uma delas é no teorema de Stokes para se transformar uma integral n-dimensional em uma outra integral $(n-1)$-dimensional ao longo da fronteira de M. Basicamente, a diferença crucial na definição é que ao invés de exigir que as cartas ψ sejam funções de $U \subset M$ para abertos V de $\mathbb{R}^n$, exigimos que as cartas sejam funções de $U \subset M$ para abertos V de $\mathbb{R}^n_+$, onde $\mathbb{R}^n_+ = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 \geq 0\}$ é a chamada "metade superior" de $\mathbb{R}^n$. A fronteira de M é denotada por ∂M e corresponde aos pontos de M que são mapeados para pontos de $\mathbb{R}^n_+$ com $x^1 = 0$. Mostre que a bola fechada $\overline{\mathbb{B}}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ é uma variedade com fronteira cuja fronteira é $\mathbb{S}^1$. **Comentário:** assuma a topologia relativa em $\mathbb{R}^n_+$. Isso quer dizer que, para se obter um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n_+$, pegamos um aberto de $\mathbb{R}^n$ e fazemos sua interseção com $\mathbb{R}^n_+$. Em outras palavras, os abertos de $\mathbb{R}^n_+$ são sempre da forma $V \cap \mathbb{R}^n_+$, onde

$V \subset \mathbb{R}^n$ é aberto de $\mathbb{R}^n$. Repare que o conjunto $V \cap \mathbb{R}^n_+$ é aberto de $\mathbb{R}^n_+$ (por definição), mas não necessariamente $V \cap \mathbb{R}^n_+$ será aberto de $\mathbb{R}^n$.

2. **Manipulando e entendendo tensores:** seja $p \in M$ um ponto em um espaço-tempo M. Assuma que $\{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ é uma base de T_pM e que $\{\hat{e}^0, \hat{e}^1, \hat{e}^2, \hat{e}^3\}$ é a base dual correpondente para T_p^*M. Seja $\mathbf{X} = X^{\mu\nu}\hat{e}_\mu \otimes \hat{e}_\nu$ um tensor do tipo $(2,0)$, $\mathbf{V} = V^\mu \hat{e}_\mu$ um vetor, e $\boldsymbol{\omega} = \omega_\mu \hat{e}^\mu$ um covetor. Assumindo que a métrica $\boldsymbol{\eta}$ do espaço-tempo é a métrica plana, i.e. $\boldsymbol{\eta} = -\hat{e}^0 \otimes \hat{e}^0 + \hat{e}^1 \otimes \hat{e}^1 + \hat{e}^2 \otimes \hat{e}^2 + \hat{e}^3 \otimes \hat{e}^3$, e sabendo que as componentes $X^{\mu\nu}$, V^μ e ω_μ são dadas por

$$X^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad V^\mu = (-1, 2, 0, -2), \qquad \omega^\mu = (-2, 0, 0, 3), \tag{1}$$

determine:

a) V_μ, d) $X_\mu{}^\nu$, g) $X^\lambda{}_\lambda$, j) $\mathbf{V}(\boldsymbol{\omega})$, m) $\mathbf{X}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})$,

b) ω_μ, e) $X^{(\mu\nu)}$, h) $V^\mu V_\mu$, k) $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{V})$, n) $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{V}, \cdot)$,

c) $X^\mu{}_\nu$, f) $X_{[\mu\nu]}$, i) $V_\mu X^{\mu\nu}$, l) $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$, o) $\mathbf{X}(\cdot, \boldsymbol{\omega})$.

Comentário: nesse exercício estamos denotando os tensores, vetores, e covetores através de símbolos em negrito ou através do acento circunflexo (no caso dos elementos das bases). Isso é útil para deixar explícita a diferença entre componentes, que nesse caso são números reais, e os tensores, vetores e covetores em si. Na prática, no entanto, para simplificar a notação, muitos autores não utilizam as fontes em negrito. É o que fazemos em todos os outros exercícios. É extremamente importante saber sempre o que cada simbolo representa, isto é, saber a que espaço cada objeto matemático pertence. (Lembre-se que, em alguns casos, o mesmo objeto pode ter duas interpretações diferentes: um vetor em um espaço euclidiano pode ser pensado como um elemento do próprio $\mathbb{R}^n$ ou então como um operador derivada que age em funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$).

3. **Manipulando e entendendo tensores - parte 2:**

   a) Repita o exercício 2 assumindo que ao invés da base $\{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ de T_pM, temos a base $\{\hat{e}_{0'}, \hat{e}_{1'}, \hat{e}_{2'}, \hat{e}_{3'}\}$, definida através de:

   $$\hat{e}_{0'} = \hat{e}_0, \quad \hat{e}_{1'} = \hat{e}_0 + \hat{e}_1, \quad \hat{e}_{2'} = \hat{e}_1 - \hat{e}_2, \quad \hat{e}_{3'} = \hat{e}_0 - \hat{e}_2 - 2\hat{e}_3$$

   b) Repita o exercício 2 assumindo que ao invés da métrica η temos a métrica

   $$\mathbf{g} = 2\left(\hat{e}^1 \otimes \hat{e}^0 + \hat{e}^0 \otimes \hat{e}^1\right) + \left(\hat{e}^2 \otimes \hat{e}^1 + \hat{e}^1 \otimes \hat{e}^2\right) + \left(\hat{e}^3 \otimes \hat{e}^2 + \hat{e}^2 \otimes \hat{e}^3\right).$$

4. **Vetores em $\mathbb{R}^3$:** no espaço euclidiano 3-dimensional $\mathbb{R}^3$, seja $p \in \mathbb{R}^3$ um ponto com coordenadas cartesianas $(x, y, z) = (1, 0, -1)$. Considere as seguintes curvas passando por p:

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda) &= (\lambda, (\lambda - 1)^2, -\lambda); \\ \beta(\mu) &= (\cos\mu, \sin\mu, \mu - 1); \\ \gamma(\sigma) &= (\sigma^2, \sigma^3 + \sigma^2, \sigma). \end{aligned}$$

a) Calcule o vetor tangente a cada uma das curvas pensando neles como vetores geométricos que moram no próprio $\mathbb{R}^3$.

b) Pensando no vetor tangente encontrado em **a** como sendo um operador derivada no ponto p, determine suas componentes na base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p , \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p , \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p \right\}$.

c) Determine as derivadas direcionais da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - yz$ no ponto p ao longo das três curvas acima.

5. **Vetores em $\mathbb{R}^3$ - parte 2:** esse exercício é muito parecido com o anterior, porém vamos construir o resultado invertendo o raciocínio. No espaço euclidiano 3-dimensional $\mathbb{R}^3$, seja $p \in \mathbb{R}^3$ um ponto com coordenadas cartesianas $(x, y, z) = (0, 1, 0)$. Considere as seguintes curvas passando por p:

$$
\begin{aligned}
\alpha(\lambda) &= (\lambda, 1, \lambda); \\
\beta(\mu) &= (\sin \mu, \cos \mu, \mu); \\
\gamma(\sigma) &= (\sinh \sigma, \cosh \sigma, \sigma + \sigma^3).
\end{aligned}
$$

a) Determine as derivadas direcionais da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (definida por $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$) no ponto p ao longo das três curvas acima.

b) Determine os vetores tangentes associados às curvas dadas no ponto p. Expresse seu resultado utilizando a base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p , \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p , \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p \right\}$.

c) Determine os vetores tangentes a cada uma das curvas pensando neles como vetores geométricos que moram em $\mathbb{R}^3$.

6. **Cálculo no $\mathbb{R}^n$:** dizemos que uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, onde U é um aberto, é diferenciável num ponto $x_0 \in U$ quando existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que satisfaz

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + T(x_0) \cdot h + r(h), \quad \text{com} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Quando existe, a transformação linear é única, sendo denotada por $T(x_0) = f'(x_0)$ ou $T(x_0) = df_{x_0}$. Repare que $T(x_0) \cdot h = f'(x_0) \cdot h = df_{x_0}(h)$ representa a aplicação da transformação linear no vetor $h \in \mathbb{R}^n$. Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x^2 + y, x + 2y^2, x^3)$, determine:

a) $f'(x0) \cdot h$ usando a definição acima, sendo $x_0 = (4, -1)$ e $h = (1, 2)$;

b) $f'(x0) \cdot h$ usando a matriz jacobiana, sendo $x_0 = (4, -1)$ e $h = (1, 2)$;

c) Usando o formalismo das variedades diferenciáveis e espaços tangentes, podemos pensar na derivada de f no ponto $p \in \mathbb{R}$ como sendo o operador $df_p : T_p\mathbb{R}^2 \to T_p\mathbb{R}^3$. Se $p = (4, -1)$ e $v_p = \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + 2 \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p \in T_p\mathbb{R}^2$, quando vale $df_p(v_p)$?

d) Defina $df_p(v_p)$ de uma maneira que seja independente do sistema de coordenadas utilizado. **Comentário:** é essa definição que generaliza o conceito de diferenciabilidade para uma função entre duas variedades quaisquer.

7. **Comutador entre campos de vetores:** assim como podemos pensar em um vetor $v_p \in T_pM$ num ponto p de uma variedade M como sendo uma aplicação $v_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, podemos pensar num campo de vetores v como sendo um operador $v : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ (o símbolo $C^\infty(M)$ é o conjunto de todas as funções infinitamente diferenciáveis $f : M \to \mathbb{R}$). Sejam v e w dois campos de vetores suaves de uma variedade n-dimensional M. Definimos o comutador $[v, w]$ entre v e w através da relação $[v, w](f) = v(w(f)) - w(v(f))$, onde $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função C^∞ qualquer.

   a) Mostre que o comutador $[v, w]$ entre dois campos de vetores é linear e satisfaz a regra de Leibnitz para concluir que $[v, w]$ é também um campo de vetores.

   b) Sejam u, v, w três campos de vetores suaves quaisquer. Mostre que a identidade de Jacobi é satisfeita, i.e. mostre que
   $$[[u, v], w] + [[w, u], v] + [[v, w], u] = 0.$$

   c) Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ campos de vetores suaves em uma variedade n-dimensional M que formam, em cada ponto $p \in M$, uma base do espaço T_pM. Portanto, em cada ponto $p \in M$, podemos expandir cada comutador $[Y_\alpha, Y_\beta]$ em termos dessa base, definindo assim funções ${C^\gamma}_{\alpha\beta}$ tais que $[Y_\alpha, Y_\beta] = {C^\gamma}_{\alpha\beta} Y_\gamma$. Mostre que ${C^\gamma}_{\alpha\beta} = -{C^\gamma}_{\beta\alpha}$ e, usando a identidade de Jacobi demonstrada acima, encontre uma equação que deve ser satisfeita pelos ${C^\gamma}_{\alpha\beta}$.

   d) Dada uma carta/sistema de coordenadas (U, ψ) da variedade M, com a notação usual $\psi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$, podemos construir uma base coordenada $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu}\big|_p \right\}$, $\mu = 1, \ldots, n$ de T_pM, para cada $p \in U \subset M$. Dessa forma, dado um campo de vetores v, podemos decompô-lo através de $v = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, sendo cada componente v^μ uma função de $p \in U \subset M$ em $\mathbb{R}$. Sabendo, disso, dados dois campos de vetores v e w, mostre que as componentes do comutador $[v, w]$ são dadas por
   $$[v, w]^\mu = v^\nu \frac{\partial w^\mu}{\partial x^\nu} - w^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu}.$$

   e) Dada a base coordenada $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$, definimos a base coordenada dual $\left\{ dx^1, \ldots, dx^n \right\}$. Logo, qualquer campo de covetores ω, pode ser decomposto através de $\omega = \omega_\mu dx^\mu$, onde cada componente ω_μ é uma função de $p \in U \subset M$ em $\mathbb{R}$. Sabendo disso, sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ campos de vetores como no item **c**. Seja $\hat{Y}^1, \ldots, \hat{Y}^n$ a base dual correspondente. Mostre que as componentes $(\hat{Y}^\gamma)_\mu$ de $\hat{Y}^\gamma$ na base coordenada dual satisfazem
   $$\frac{\partial (\hat{Y}^\gamma)_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial (\hat{Y}^\gamma)_\nu}{\partial x^\mu} = {C^\gamma}_{\alpha\beta} (\hat{Y}^\alpha)_\mu (\hat{Y}^\beta)_\nu.$$

   Dica: contraia ambos os lados da equação com $(\hat{Y}_\sigma)^\mu (\hat{Y}_\rho)^\nu$.

   f) Observe que o comutador entre dois campos de vetores de uma base coordenada qualquer $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$ é sempre nulo, i.e. $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$. Queremos mostrar que a recíproca também é verdade, isto é, que se temos uma base em que o comutador entre dois campos de vetores quaisquer se anulam, então existe um sistema de coordenadas na qual essa base é uma base coordenada. Mais precisamente, assuma que $Y_1, \ldots, Y_n$ são campos de vetores suaves em uma variedade n-dimensional M que formam uma base de T_pM em cada ponto $p \in M$. Suponha que $[Y_\alpha, Y_\beta] = 0$ para quaisquer dois α, β. Prove que em uma vizinhança de cada $p \in M$ existem coordenadas $(y_1, \ldots, y_n)$ tais que $Y_1, \ldots, Y_n$ são os campos de vetores coordenados, i.e., tais que $Y_\mu = \frac{\partial}{\partial y^\mu}$.

Dica: em uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$, as equações $\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = F_\mu$, com $\mu = 1, \ldots, n$, para a função desconhecida f, possuem solução se e somente se $\frac{\partial F_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial F_\nu}{\partial x^\mu}$. Use esse fato, juntamente com o item **e**, para encontrar as novas coordenadas.

g) Dê um exemplo de dois campos de vetores em $\mathbb{R}^2$ que, em qualquer ponto $p \in \mathbb{R}^2$, são linearmente independentes e não-nulos, e cujo comutador não é nulo. Esse par de campos de vetores constitui uma base para $T_p\mathbb{R}^2$ em qualquer ponto $p \in \mathbb{R}^2$, mas por causa dos resultados acima não pode ser uma base coordenada pois o comutador entre eles não é nulo.

8. **Métrica, coordenadas esféricas, mudança de coordenadas:** a métrica do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ é o tensor g do tipo $(0,2)$ que, em coordenadas cartesianas $x^\mu = (x, y, z)$, é representado por

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz.$$

Como a métrica pode ser utilizada para se definir distâncias, é comum utilizarmos a notação ds^2 (por causa do intervalo/distância entre dois pontos no espaço-tempo) para representá-la. Para simplificar a notação, é comum também omitirmos os símbolos $\otimes$ e escrever simplesmente

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

As coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) são definidas através de

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad \tan\phi = \frac{y}{x}.$$

a) No formalismo das variedades (i.e. atlas, cartas, etc.), o que as relações acima representam? As coordenadas cartesianas usuais podem ser utilizadas para descrever o espaço todo? E as coordenadas esféricas definidas acima?

b) Mostre que a métrica acima, usando coordenadas esféricas, pode ser escrita como $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$. Faça isso de duas maneiras distintas: a primeira, usando as relações de mudança de coordenadas $g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu}$, e a segunda calculando diretamente dx, dy, dz em termos de dr, $d\theta$, dz a partir das relações $x = x(r, \theta, \phi)$, $y = y(r, \theta, \phi)$, $z = z(r, \theta, \phi)$. **Comentário:** ao fazer isso, é importante ter em mente que você está calculando o gradiente das funções coordenadas x, y, z para determinar os covetores dx, dy, dz em termos dos covetores dr, $d\theta$, $d\phi$.

c) Suponha que uma partícula descreve uma trajetória nesse espaço 3-dimensional dada por $x(\lambda) = \cos\lambda$, $y(\lambda) = \sin\lambda$, $z(\lambda) = \lambda$, onde $\lambda \in (-\infty, \infty)$ é o parâmetro da curva. Quais equações descrevem essa mesma curva no sistema de coordenadas esféricas? Obtenha o vetor tangente à curva em um ponto qualquer do espaço tanto no sistema de coordenadas cartesiano como no sistema de coordenadas esférico.

d) Na Relatividade Especial, consideramos o espaço-tempo como sendo a variedade $\mathbb{R}^4$ com a métrica $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$, escrita nas coordenadas cartesianas usuais (t, x, y, z). Encontre as componentes $g_{\mu\nu}$ da métrica e $g^{\mu\nu}$ da sua inversa, se utilizarmos coordenadas "girantes" (t', x', y', z') definidas por

$$t' = t, \qquad x' = \sqrt{x^2 + y^2}\cos(\phi - \omega t), \qquad y' = \sqrt{x^2 + y^2}\sin(\phi - \omega t), \qquad z' = z,$$

onde $\tan\phi = y/x$.

9. **Bases ortonormais:** seja V um espaço vetorial n-dimensional munido de uma métrica não-degenerada g.

   a) Mostre que é sempre possível encontrar uma base ortonormal de V, i.e. uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ que satisfaz $g(e_\alpha, e_\beta) = \pm\delta_{\alpha\beta}$. **Dica:** use indução.
   b) Mostre que a assinatura da métrica (i.e. o número de valores positivos $(+1)$ e negativos (-1) da matriz diagonal que representa g na base ortonormal) é independente da base ortonormal escolhida. **Comentário:** na Relatividade a métrica é Lorentziana, o que quer dizer que sua assinatura tem um valor negativo e todos os outros positivos (ou então, dependendo da convenção adotada, um valor positivo e todos os outros negativos).

   Para os próximos itens, considere a variedade $M = \mathbb{R}^2$ com a métrica g dada, em coordenadas cartesianas (x, y), por $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dx^2 + dy^2$.

   c) Usando coordenadas polares (r, θ) definidas por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, determine a base coordenada $\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\}$ para $T_p\mathbb{R}^2$ em termos da base coordenada $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ para cada ponto $p \in \mathbb{R}^2$.
   d) Mostre que a base coordenada $\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\}$ encontrada acima é ortogonal mas não é ortonormal. (De modo geral, bases coordenadas não serão nem ortogonais nem ortonormais.) Sabendo disso, defina uma nova base $\{e_{\hat{1}}, e_{\hat{2}}\}$ para $T_p\mathbb{R}^2$ fazendo $e_{\hat{1}} = |g(\partial_r, \partial_r)|^{-1/2}\frac{\partial}{\partial r}$ e $e_{\hat{2}} = |g(\partial_\theta, \partial_\theta)|^{-1/2}\frac{\partial}{\partial \theta}$.
   e) A partir das definições e resultados do exercício 7, mostre que o comutador $[e_{\hat{1}}, e_{\hat{2}}] \neq 0$ e, portanto, a base $\{e_{\hat{1}}, e_{\hat{2}}\}$ é uma base não-coordenada. Mostre isso explicitamente, assumindo que existe um sistema de coordenadas (ξ, η) tal que $\frac{\partial}{\partial \xi} = e_{\hat{1}}$ e $\frac{\partial}{\partial \eta} = e_{\hat{2}}$, obtendo com isso algum resultado absurdo.
   f) Defina $\omega^{\hat{1}}$ e $\omega^{\hat{2}}$ de modo que $\{\omega^{\hat{1}}, \omega^{\hat{2}}\}$ seja a base dual de $\{e_{\hat{1}}, e_{\hat{2}}\}$ para $T_p^*\mathbb{R}^2$ em cada ponto $p \in \mathbb{R}^2$. Escreva a métrica g usando a base $\{\omega^{\hat{1}}, \omega^{\hat{2}}\}$.
   Comentário: bases ortonormais não são bases coordenadas se o sistema de coordenadas não for o cartesiano. Bases ortonormais são chamadas de tétrades. Em geral, quando se estuda sistemas de coordenadas não-cartesianos em cursos de Física-Matemática, se trabalha apenas com bases ortonormais. Em Relatividade Geral, no entanto, é muito mais comum se trabalhar com bases coordenadas ao invés de bases ortonormais (tétrades). A diferença é que nas bases coordenadas toda a informação sobre a curvatura do espaço está implícita na métrica, sendo que o gradiente de funções escalares é escrito em termos de simples derivadas parciais; nas bases ortonormais, por outro lado, a métrica acaba sendo sempre trivial, porém o gradiente de uma função escalar acaba sendo mais complicado.

10. **Densidades tensoriais e o tensor de Levi-Civita:** o símbolo completamente antissimétrico de Levi-Civita, $\tilde{\epsilon}_{\mu_1 \ldots \mu_n}$, é definido por

$$\tilde{\epsilon}_{\mu_1 \ldots \mu_n} = \begin{cases} +1, & \text{se } \mu_1\mu_2 \ldots \mu_n \text{ é uma permutação par de } 01 \ldots (n-1), \\ -1, & \text{se } \mu_1\mu_2 \ldots \mu_n \text{ é uma permutação ímpar de } 01 \ldots (n-1), \\ 0, & \text{caso contrário, ou seja se dois dos índices em } \mu_1\mu_2 \ldots \mu_n \text{ são repetidos.} \end{cases}$$

   Por definição, o símbolo de Levi-Civita tem as componentes acima em qualquer sistema de coordenadas. Não foi à toa que definimos essa quantidade como um símbolo e não como um tensor. Vamos agora entender a razão disso.

a) Seja $M^{\mu}{}_{\mu'}$ uma matriz $n \times n$ qualquer (μ indica a linha e μ' indica a coluna). Denote seu determinante por $|M|$. É possível mostrar então que: $\tilde{\epsilon}_{\mu'_1 \ldots \mu'_n}|M| = \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \ldots \mu_n} M^{\mu_1}{}_{\mu'_1} \ldots M^{\mu_n}{}_{\mu'_n}$. Sabendo disso, mostre que podemos escrever $|M| = \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \ldots \mu_n} M^{\mu_1}{}_0 M^{\mu_2}{}_1 \ldots M^{\mu_n}{}_{n-1}$. Essa fórmula serve para calcular o determinante de qualquer matriz. Mostre explicitamente que ela vale para matrizes 2×2 e para matrizes 3×3.

b) Usando o resultado acima, mostre que o símbolo de Levi-Civita se transforma de acordo com a seguinte regra:

$$\tilde{\epsilon}_{\mu'_1 \ldots \mu'_n} = |J|\, \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \ldots \mu_n} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\mu'_n}},$$

onde $|J| = \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right|$ é o determinante da matriz jacobiana. Portanto, ao menos do fator $|J|$, o símbolo de Levi-Civita se transforma exatamente como um tensor. Como o fator $|J|$ aparece elevado a potência 1, dizemos que o símbolo de Levi-Civita é uma densidade tensorial de peso 1.

c) A métrica g de um espaço-tempo é um tensor do tipo $(0,2)$ e, portanto, se transforma de acordo com $g_{\mu'\nu'} = g_{\mu'\nu'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}$. Usando esse resultado, mostre que o determinante $g = g(x^{\mu}) = |g_{\mu\nu}|$ do tensor métrico se transforma de acordo com $g(x^{\mu'}) = |J|^{-2} g(x^{\mu})$. Portanto, ao menos do fator $|J|$, o determinante da métrica se transforma exatamente como um escalar. Como o fator $|J|$ aparece elevado a potência -2, dizemos que o determinante da métrica é uma densidade escalar de peso -2.

d) Mostre que, dada uma densidade tensorial qualquer de peso w, podemos transformá-la em um tensor simplesmente multiplicando-a por $|g|^{w/2}$. (O módulo no determinante é necessário pois em alguns casos, como no caso de métricas Lorentzianas, o determinante é negativo). Em particular, podemos definir o tensor de Levi-Civita $\epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ a partir do símbolo de Levi-Civita $\tilde{\epsilon}_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ fazendo

$$\epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n} = \sqrt{|g|}\, \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \ldots \mu_n}$$

11. **Formas diferenciais e integração em variedades:**

a) Em um espaço plano, sabemos que a área de um paralelogramo gerado pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é dada por $|\vec{A} \times \vec{B}|$ e que o volume de um paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ é dado por $|(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}|$. Mostre que podemos escrever $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\epsilon_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu}|$ e $|(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}| = |\epsilon_{\mu\nu\rho} A^{\mu} B^{\nu} C^{\rho}|$, onde ϵ é o tensor de Levi-Civita definido no exercício anterior. **Comentário:** como o espaço é plano, não há diferença entre o símbolo e o tensor de Levi Civita.

b) Seguindo a lógica acima, no espaço de Minkowski podemos definir o volume do paralelepípedo gerado pelos quadrivetores A^{μ}, B^{ν}, C^{ρ} e D^{σ} como sendo a quantidade $|\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^{\mu} B^{\nu} C^{\rho} D^{\sigma}|$. Dizemos que esses quadrivetores tem orientação positiva quando vale $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^{\mu} B^{\nu} C^{\rho} D^{\sigma} > 0$. O volume de uma região arbitrária é obtido somando-se volumes de paralelepípedos infinitesimais gerados pelos vetores $\Delta x^0 \hat{e}_0$, $\Delta x^1 \hat{e}_1$, $\Delta x^2 \hat{e}_2$, e $\Delta x^3 \hat{e}_3$, onde $\{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ é a base coordenada associada ao sistema de coordenadas (t, x, y, z). O volume de cada paralelepípedo infinitesimal é portanto

$$\Delta^4 V = \epsilon_{0123} \Delta x^0 \Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3 = \frac{1}{4!} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \Delta x^{\mu} \Delta x^{\nu} \Delta x^{\sigma} \Delta x^{\rho} (-1)^{\Pi},$$

onde Π é o sinal da permutação (i.e. $\Pi = 0$ se $\mu\nu\sigma\rho$ é uma permutação par de 0123, e $\Pi = 1$ se $\mu\nu\sigma\rho$ é uma permutação ímpar de 0123). Demonstre a segunda igualdade na relação acima.

Comentário: Mudando a notação é possível obter o elemento de volume em uma forma mais convencional. Para isso, escrevemos $d^4V = \epsilon_{0123}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ ao invés de $\Delta^4 V = \epsilon_{0123}\, \Delta x^0 \Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3$. Temos, portanto, que o volume de uma região arbitrária Ω é dado por

$$|\Omega| = \int_\Omega \epsilon_{0123}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \equiv \int_\Omega d^4V$$

Como $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^\mu B^\nu C^\rho D^\sigma$ é um invariante (i.e. um escalar) para quaisquer quadrivetores A^μ, B^ν, C^ρ, D^σ, concluimos que a fórmula acima vale para qualquer referencial. No caso do espaço tempo plano, com a métrica $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$, temos $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} = \tilde{\epsilon}_{\mu\nu\sigma\rho}$ e, portanto, o elemento de volume é simplesmente $d^4V = \epsilon_{0123}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \tilde{\epsilon}_{0123}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$. No caso de uma métrica diferente (por exemplo, coordenadas esféricas), temos $d^4V = \epsilon_{0123}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{|g|}\, \tilde{\epsilon}_{0123}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{|g|}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$, onde utilizamos resultados do exercício 10. De forma mais geral, em uma variedade M de dimensão n, definimos a integral de uma função $f : M \to \mathbb{R}$ como sendo

$$\int_\Omega f\, d^nV = \int_\Omega f\, \epsilon_{01\ldots n-1}\, dx^0 dx^1 \ldots dx^{n-1} = \int_\Omega f\, \sqrt{|g|}\, dx^0 dx^1 \ldots dx^{n-1}.$$

c) O tensor de Levi Civita $\epsilon_{01\ldots n-1}$ é exemplo de uma estrutura matemática chamada forma diferencial (ou simplesmente forma). As formas constituem a maneira rigorosa de se definir a integral em uma variedade, formalizando a ideia construida acima. Uma p-forma diferencial é simplesmente um tensor do tipo $(0,p)$ que é totalmente antisimétrico. Em particular, qualquer escalar é uma 0-forma, qualquer covetor (tensor do tipo $(0,1)$) é uma 1-forma, e qualquer tensor F do tipo $(0,2)$ cujas componentes satisfazem $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ é uma 2-forma. O espaço de todas as p-formas em uma variedade M é denotado por $\Lambda^p(M)$. É um simples exercício de combinatória mostrar que, em um ponto qualquer de uma variedade de dimensão n, existem $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ p-formas que são linearmente independentes. Consequentemente, num espaço 4-dimensional existem apenas uma 0-forma (i.e. escalares), quatro 1-formas (i.e. covetores), seis 2-formas, quatro 3-formas, e uma 4-forma que são linearmente independentes. Mostre, explicitamente, que não existem p-formas com $p > n$ num espaço de dimensão n.

d) Umas das razões pelas quais as formas são tão importantes é que elas podem ser diferenciadas e integradas sem que sejam introduzidas estruturas geométricas adicionais em uma variedade. Para entender isso, primeiro definimos o produto externo, que é uma operação entre uma p-forma e uma q-forma, produzindo uma $(p+q)$-forma. Mais precisamente, se A é uma p-forma e B é uma q-forma, então o produto externo entre A e B, denotado por $A \wedge B$, é definido como sendo a $(p+q)$-forma cujas componentes são

$$(A \wedge B)_{\mu_1 \ldots \mu_{p+q}} = \frac{(p+q)!}{p!q!} A_{[\mu_1 \ldots \mu_p} B_{\mu_{p+1} \ldots B_{\mu_{p+q}}]}$$

Já a derivada exterior, denotada pelo símbolo d, é uma operação que transforma uma p-forma em uma $(p+1)$-forma. Mais precisamente, se A é uma p-forma, definimos dA como sendo a $(p+1)$-forma cujas componentes são

$$(dA)_{\mu_1 \ldots \mu_{p+1}} = (p+1)\, \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \ldots \mu_{p+1}]}$$

O exemplo mais simples de derivada exterior é o gradiente, que é a derivada exterior de uma 0-forma. Mostre que a derivada exterior satisfaz uma versão modificada da regra de Leibnitz: se ω é uma p-forma e η é uma q-forma, então vale

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (d\eta).$$

e) A derivada exterior tem grande importância pois, mesmo em espaços curvos, ela é um tensor (ao contrário da derivada parcial). Seja W uma 1-forma cujas componentes em uma base coordenada são W_μ. Mostre que as derivadas parciais de W, i.e. o objeto cujas componentes são $\partial_\nu W_\mu$, não se transforma como um tensor, mas que a derivada exterior de W, i.e. dW, se transforma sim como um tensor.

f) Seja ω uma p-forma. Mostre que $d^2\omega = d(d\omega) = 0$. **Comentário:** dizemos que uma p-forma A é fechada se $dA = 0$ e dizemos que ela é exata se existe uma $(p-1)$-forma B tal que $A = dB$. Toda forma exata é fechada, mas nem toda forma fechada é exata.

g) Em uma variedade M de dimensão n, a maneira rigorosa de se entender a integral é através de formas diferenciais. Mais precisamente, a integral sobre uma região n-dimensional $\Sigma \subset M$, $\int_\Sigma$, é uma transformação que leva um campo de n-formas em um número real. Por exemplo, em uma dimensão, temos apenas uma 1-forma que é linearmente independente. Se x denota a coordenada, então podemos escrever qualquer 1-forma ω como sendo $\omega = \omega(x)dx$. A integral é, nesse caso, simplesmente $\int_\Sigma \omega = \int_\Sigma \omega(x)\, dx$. Perceba que estamos acostumados a pensar em dx como uma distância infinitesimal, mas aqui dx representa uma 1-forma (mais precisamente, um campo de 1-formas). No caso geral de $\Lambda^n(M)$ já vimos que existe apenas uma n-forma que é linearmente independente, que serve como base para $\Lambda^n(M)$, e portanto qualquer n-forma ω é um múltiplo dessa n-forma base. Repare que podemos tomar como base qualquer n-forma em $\Lambda^n(M)$ que não seja nula. Se $(x^1, \dots, x^n)$ são as coordenadas utilizadas em M, então gostaríamos de tomar a n-forma base como sendo $dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$. O problema é que $dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$ não se transforma como um tensor, mas sim como uma densidade tensorial. Para entender isso, vamos assumir $n = 2$ e considerar dois sistemas de coordenadas distintos: $\{x^1, x^2\}$ e $\{y^1, y^2\}$. Partindo de $dx^1 \wedge dx^2$, use as transformações dos covetores dx^1 e dx^2 em termos de dy^1 e dy^2 para encontrar a relação entre $dx^1 \wedge dx^2$ e $dy^1 \wedge dy^2$ e concluir que $dx^1 \wedge dx^2$ se transforma como uma densidade tensorial de peso 1.

h) Para generalizar o resultado do item anterior, mostre primeiro que

$$dx^0 \wedge \dots dx^{n-1} = \frac{1}{n!} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}.$$

Usando esses fatos, juntamente com os resultados do exercício 10, mostre que $dx^0 \wedge \dots dx^{n-1}$ é uma densidade tensorial de peso 1. Consequentemente, não podemos usar $dx^0 \wedge \dots dx^{n-1}$ como a n-forma base de $\Lambda^n(M)$. O que podemos usar é a quantidade

$$(n!)^{-1} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots dx^{\mu_n} = \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \dots dx^{n-1}.$$

Portanto, qualquer n-forma ω em uma variedade M de dimensão n pode ser escrita como $\omega = \omega(x^\mu)\sqrt{|g(x^\mu)|} dx^0 \wedge \dots dx^{n-1}$. Em um outro sistema de coordenadas, temos simplesmente $\omega = \omega(x^{\mu'})\sqrt{|g(x^{\mu'})|} dx^{0'} \wedge \dots dx^{n-1'}$. Como $\omega(x^\mu)$ pode ser uma função qualquer, dada uma função $f : M \to \mathbb{R}$, definimos a integral de f sobre a região $\Sigma \subset M$, como sendo (compare com os resultados do exercício 10)

$$\int_{\Sigma} f \sqrt{|g|}\, dx^0 dx^1 \dots dx^{n-1}.$$