Lista 3 - FIS 404 - Relatividade Geral

Curvatura, campos de Killing, fluidos, eletromagnetismo.

2° quadrimestre de 2017 - Professor Maurício Richartz

Leitura sugerida: Carroll (seções 3.1-3.4,3.6-3.8), Wald (capítulo 3 e seções 4.1-4.3).

1. **(***)** No Cálculo Vetorial aprendemos a calcular o gradiente ($\nabla\varphi$), o divergente ($\nabla \cdot \vec{V}$) e o rotacional ($\nabla \times \vec{V}$) em três dimensões. Usando a derivada covariante e o formalismo dos tensores, encontre as fórmulas para essas três operações em coordenadas esféricas definidas por

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi, \\ y = r\sin\theta\sin\phi, \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

2. Em um espaço euclidiano 3-dimensional definimos coordenadas parabólicas (u, v, ϕ) através de

$$\begin{cases} x = uv\cos\phi, \\ y = uv\sin\phi, \\ z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{cases}$$

a) Encontre a matriz de mudança de coordenadas entre coordenadas parabólicas e coordenadas cartesianas $\partial x^\alpha/\partial x^{\beta'}$, bem como a sua inversa.

b) Encontre a base coordenada de vetores e a base coordenada de covetores para as coordenadas parabólicas em termos das bases correspondentes em coordenadas cartesianas.

c) Encontre a métrica e a métrica inversa do espaço euclidiano em coordenadas parabólicas.

d) Calcule os símbolos de Christoffel.

e) Calcule o divergente $\nabla_\mu V^\mu$ de um vetor V^μ qualquer e o laplaciano $\nabla^\mu\nabla_\mu f$ de uma função escalar qualquer em coordenadas parabólicas.

3. **(***)** Considere uma 2-esfera com coordenadas (θ, ϕ) e métrica $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$.

a) Mostre que as curvas de longitude constante ($\phi =$constante) são geodésicas e que a única curva de latidude constante ($\theta =$constante) que é geodésica é o equador ($\theta = \pi/2$).

b) Transporte paralelamente o vetor $V^\mu = a\partial_\theta + b\partial_\phi$ uma vez em torno de um círculo de latitude constante θ_0. Quais são as componentes do vetor obtido em função de θ_0?

c) Determine os vetores de Killing desse espaço-tempo.

4. **(***)** Uma boa aproximação para métrica na superfície da Terra e nas suas vizinhanças é

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

onde $\Phi = -GM/r$ é o potencial gravitacional Newtoniano (G é a constante de Newton e M é a massa da Terra). Ao longo do problema, assuma que $\Phi \ll 1$.

a) Imagine um relógio na superfície da Terra a uma distância R_1 do centro da Terra e um outro relógio no topo de um prédio alto a uma distância R_2 do centro da Terra. Calcule o tempo marcado por cada relógio em função do tempo coordenado t. Qual relógio é mais rápido?

b) Encontre a geodésica correspondente a um movimento circular de órbita em torno do equador da Terra ($\theta = \pi/2$). Quanto vale $d\phi/dt$?

c) Quanto tempo próprio se passa para que um satélite localizado a uma distância R_1 do centro da Terra complete uma órbita? Trabalhe em primeira ordem em Φ. Substitua os valores para G, M e R_1, sem esquecer de recuperar os fatores c, para encontrar o resultado em segundos. Compare o valor com o tempo medido por um relógio estacionário na superfície da Terra.

5. **(***)** A métrica da 3-esfera em coordenadas $x^\mu = (\psi, \theta, \phi)$ é dada por

$$ds^2 = d\psi^2 + \sin^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

a) Encontre os símbolos de Christoffel da seguinte maneira: escreva as equação de Euler-Lagrange para maximizar o tempo próprio de uma curva qualquer com pontos inicial e final fixos; compare a equação encontrada com a equação geodésica e extraia os símbolos de Christoffel.

b) Calcule o tensor de Riemann, o tensor de Ricci, e o escalar de Ricci.

6. Encontre explicitamente um conjunto completo de campos de vetores de Killing para os seguintes espaços:

a) espaço de Minkowski, cuja métrica é $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ (dica: são 10 vetores de Killing, correspondendo às transformações de Lorentz (grupo de Poincaré)),

b) um espaço-tempo com coordenadas (u, v, x, y) e métrica

$$ds^2 = -(dudv + dvdu) + a^2(u)dx^2 + b^2(u)dy^2,$$

onde a e b são funções não especificadas de u. (Essa métrica representa o espaço-tempo de uma onda gravitacional. Dica: são 5 vetores de Killing; para todos eles a componente u se anula, i.e. $K^u = 0$).

7. Sobre o tensor de Riemann, mostre que:

a) $R_{abcd} = R_{cdab}$,

b) devido às simetrias, em um espaço de dimensão n, das n^4 componentes do tensor de Riemann apenas $n^2(n^2 - 1)/12$ são independentes.

8. **Fluidos perfeitos na Relatividade Especial:** um fluido perfeito é definido como sendo uma distribuição contínua de matéria cujo tensor de stress-energia-momento é dado por

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(\eta_{ab} + u_a u_b),$$

onde u^a é um quadrivetor tipo-tempo unitário que representa a quadrivelocidade do fluido. As funções ρ e P são interpretadas, respectivamente, como a densidade de massa-energia e a pressão do fluido medidas no referencial de repouso do fluido. O fluido é denominado perfeito devido à ausência de termos de condução de calor e de termos de stress correspondentes à viscosidade.

a) Na ausência de forças externas, o movimento de um fluido perfeito é governado por $\partial^a T_{ab} = 0$. Mostre que, projetando essa equação nas direções paralela e perpendicular a u^a, obtemos:

$$u^a \partial_a \rho + (\rho + P)\partial^a u_a = 0, \qquad (P+\rho)u^a \partial_a u_b + (\eta_{ab} + u_a u_b)\partial^a P = 0.$$

b) Mostre que no limite não-relativístico, i.e. $P \ll \rho$, $u^a = (1, \vec{v})$, e $v\frac{dP}{dt} \ll \left|\vec{\nabla} P\right|$, as equações acima se tornam:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \qquad \rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}\right] = -\vec{\nabla} P,$$

ou seja, a equação $\partial^a T_{ab} = 0$ corresponde à equação da continuidade (i.e. conservação de massa) e a equação de Euler.

c) Considere uma família de observadores inerciais com velocidades paralelas v^a (ou seja, $\partial_b v^a = 0$). De acordo com a definição de T_{ab}, a quantidade $J_a = -T_{ab} v^b$ representa o quadrivetor corrente de densidade de massa-energia medido por esses observadores. Mostre que $\partial^a J_a = 0$, ou seja o divergente da corrente é zero (usando a lei de Gauss(teorema de Stokes) é possível mostrar que essa equação implica que a energia do sistema é conservada).

9. **(***) Eletromagnetismo na Relatividade:** As equações de Maxwell, na forma diferencial, são dadas por (em unidades $c = \mu_0 = \epsilon_0 = 1$):

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi \vec{J}, & \nabla \cdot \vec{B} = 0, \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, & \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \end{cases}$$

onde $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são, respectivamente, os campos (vetores espaciais) elétrico e magnético. Para escrever as equações de Maxwell na forma tensorial, definimos um tensor antisimétrico F_{ab}. Para um observador que se move com quadrivelocidade u^a, a quantidade $E_a = F_{ab} v^b$ é interpretada como o campo elétrico medido pelo observador enquanto a quantidade $B_a = -\frac{1}{2}\epsilon_{ab}{}^{cd} F_{cd} v^b$ é interpretada como o campo magnético. Uma partícula de massa m e carga q, com velocidade v^a, que se move em um campo eletromagnético F_{ab} obedece à equação $v^a \partial_a v^b = \frac{q}{m} F^b{}_c v^c$.

a) Mostre que, no referencial em que o observador está em repouso, o tensor eletromagnético é (em coordenadas cartesianas):

$$F_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

b) Encontre as componentes do tensor F^{ab} no referencial de repouso do observador e em coordenadas cartesianas.

c) Mostre que duas das equações de Maxwell podem ser escritas na forma covariante como $F_{[\mu\nu,\gamma]} = 0$.

d) Mostre que as outras duas equações de Maxwell podem ser escritas na força covariante como $\partial_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\mu$, onde j^μ é o quadrivetor corrente cujas componentes no referencial de repouso são $j^\mu = (\rho, \vec{J})$.

e) Mostre que a antisimetria de F_{ab} juntamente com as equações de Maxwell, implica a conservação de carga: $\partial^b j_b = 0$.

f) É possível mostrar que a equação $F_{[\mu\nu,\gamma]} = 0$ implica a existência de um campo vetorial A^a (o potencial eletromagnético) tal que $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$. Mostre que existe uma liberdade de gauge na definição de A_a: $A_a \to A_a + \partial_a \chi$, onde χ é uma função qualquer. Mostre que é possível fixar o gauge de modo a se ter $\partial^a A_a = 0$ (esse é o gauge de Lorentz). No gauge de Lorentz, A_a é definido por $\partial^a \partial_a A_b = -4\pi j_b$, que representa a equação de ondas eletromagnéticas.

g) Na Relatividade Geral, seguindo a "regra da substituição"/ mínima, as equações de Maxwell assumem a forma

$$\begin{cases} \nabla^a F_{ab} = -4\pi j_b, \\ \nabla_{[a} F_{bc]} = 0. \end{cases}$$

Pela "regra da substituição" mínima, o potencial eletromagnético A_a é tal que $F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a$. Mostre que a derivada covariante nessa expressão se reduz à derivada ordinária e, portanto, $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$ assim como no espaço-tempo plano. Pela regra da substituição mínima, a equação de ondas eletromagnéticas deveria ser $\nabla^a \nabla_a A_b = -4\pi j_b$. Mostre, no entanto, que essa equação implica em não conservação da corrente, i.e. $\nabla_a j^a \neq 0$. Isso ilustra uma deficiência da regra "regra da substituição" mínima. Ao invés dessa equação de onda, devemos usar $\nabla^a \nabla_a A_b - R^d{}_b A_d = -4\pi j_b$. Mostre que essa equação implica $\nabla_a j^a = 0$.

10. **Eletromagnetismo na Gravitação Quântica:** foi sugerido que a gravitação quântica poderia induzir um acoplamento de curvatura ao eletromagnetismo de modo ao alterar uma das equações de Maxwell:

$$\nabla_\nu \left[(1 + \alpha R) F^{\mu\nu}\right] = 4\pi j^\mu, \qquad \nabla_{[a} F_{bc]} = 0,$$

onde α é uma constante e $R = R^\mu_\mu$ é o escalar de curvatura do espaço-tempo. No espaço-tempo plano, como $R = 0$, essas equações se reduzem às equações usuais do eletromagnetismo. O fato de $\nabla_{[a} F_{bc]} = 0$ não ser modificada, garante a existência do potencial eletromagnético A^μ.

a) Mostre que a antisimetria de $F_{\mu\nu}$ implica que

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \left[(1 + \alpha R) F^{\mu\nu}\right] = (1 + \alpha R) \nabla_\mu \nabla_\nu F^{\mu\nu}$$

b) Usando o resultado acima, mostre que as novas equações de Maxwell implicam que a corrente é conservada, i.e. $\nabla_a j^a = 0$.

c) A partir de uma análise dimensional, estime o valor numérico da constante de acoplamento α induzida pela Gravitação Quântica.

11. **(***) Espaço-tempo esfericamente simétrico:** o espaço-tempo quadridimensional esfericamente simétrico mais geral possível é dado pela métrica

$$ds^2 = -e^{2\nu(t,r)} dt^2 + e^{2\lambda(t,r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2,$$

onde $\nu(t,r)$ e $\lambda(t,r)$ são funções arbitrárias de t e r.

a) Determine g_{ab}, g e g^{ab};

b) Determine todos os símbolos de Christoffel não-nulos de Γ^a_{bc} (lembre-se da simetria $\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{cb}$);

c) Determine todas as componentes não nulas do tensor de Riemann R_{abcd} (lembre-se das simetrias de R_{abcd} para evitar repetir contas);

d) Determine as componentes não nulas do tensor de Ricci R_{ab}, o escalar de Ricci R, e as componentes não nulas do tensor de Einstein G_{ab}.