Lista 3 - FIS 404 - Relatividade Geral

Curvatura, campos de Killing, fluidos, eletromagnetismo.

2° quadrimestre de 2017 - Professor Maurício Richartz

Leitura sugerida: Carroll (seções 3.1-3.4,3.6-3.8), Wald (capítulo 3 e seções 4.1-4.3).

1. Veja o problema 3.2 do Carroll e o "box 20.1"na página 437 do Hartle. Nas coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), temos as bases coordenada $\{\partial_r, \partial_\theta, \partial_\phi\}$ e $\{dr, d\theta, d\phi\}$. O gradiente de um campo escalar φ é então $\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla_\mu \varphi\, dx^\mu = \partial_\mu \varphi\, dx^\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} d\phi$. O divergente de um campo de vetores $V = V^\mu \partial_\mu = V^r \partial_r + V^\theta \partial_\theta + V^\phi \partial_\phi$ é o escalar $\mathrm{div}\, V = \nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 V^r)}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial (\sin\theta V^\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial V^\phi}{\partial \phi}$. O rotacional do campo de vetores V é dado por $\mathrm{rot}\, V = \epsilon^{jki} (\nabla_j V_k) \partial_i = \epsilon^{jki} (\partial_j V_k) \partial_i$. Ou seja, as componentes do rotacional são $(\mathrm{rot}\, V)^i = \epsilon^{jki} (\partial_j V_k)$, onde ϵ^{jki} é o tensor contravariante de Levi-Civita (não confunda com o símbolo de Levi-Civita). Nas coordenadas esféricas temos

$$\mathrm{rot}\, V = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{\partial V_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} \right) \partial_r + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial r} \right) \partial_\theta + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \partial_\phi.$$

   Pare recuperar as fórmulas usuais do Cálculo vetorial temos que usar uma base ortonormal ao invés da base coordenada. Em cada ponto do espaço, definimos a base ortornormal $\{\hat{e}^r, \hat{e}^\theta, \hat{e}^\phi\}$ para o espaço cotangente através de $\hat{e}^r = dr$, $\hat{e}^\theta = r d\theta$, $\hat{e}^\phi = r \sin\theta d\phi$. Analogamente, a base ortonormal para o espaço tangente é $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi\}$, onde $\hat{e}_r = \partial_r$, $\hat{e}_\theta = r^{-1} \partial_\theta$, $\hat{e}_\phi = (r \sin\theta)^{-1} \partial_\phi$. A partir das contas feitas com as bases coordenadas, transforme para as bases ortonormais para recuperar as fórmulas usuais.

3. **Esse problema é baseado no problema 3.5 do Carroll. Veja aqui:** `http://www.physics.utah.edu/~sandick/7720fall2016/Homework3Sols.pdf`

   a) Considere uma curva parametrizada por λ, isto é $(\theta(\lambda), \phi(\lambda))$. Para que essa curva represente uma geodésica, ela deve satisfazer à equação geodésica. Usando a equação geodésica, temos $\theta''(\lambda) - \sin(\theta)\cos(\theta)\phi'(\lambda)^2 = 0$ e $\phi''(\lambda) + 2\cot(\theta)\theta'(\lambda)\phi'(\lambda) = 0$. Faça então $\phi(\lambda) =$ constante ou $\theta(\lambda) =$ constante para mostrar o que se pede.

   b) Veja o problema/solução 10.1 do Lightman. Um círculo de latitude constante, parametrizado pela própria longitude, é definido por $(\theta(\phi), \phi(\phi)) = (\theta_0, \phi)$. Seu vetor tangente é dado por $W^\mu = (0, 1)$. Para fazer o transporte de um vetor $V^\mu = (a, b)$ ao longo dessa curva, temos que resolver a equação do transporte paralelo $W^\mu \nabla_\mu V^\nu = 0$, onde $V^\nu = (V^\theta(\phi), V^\phi(\phi))$ é um campo de vetores, sujeita à condição inicial $V^\nu(0) = (a, b)$.

   c) Seja $X^\mu = (X^\theta, X^\phi)$ um campo de vetores. Para que esse campo de vetores seja um vetor de Killing, ele deve satisfazer à equação $\nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu = 0$. Use então a fórmula para derivadas covariantes de covetores para encontrar três equações diferenciais parciais:

   $$2\partial_\theta V_\theta = 0, \qquad -2\cot\theta V_\phi + \partial_\phi V_\theta + \partial_\theta V_\phi = 0, \qquad \sin(2\theta) V_\theta + 2\partial_\phi V_\phi = 0.$$

   Para resolver use separação de variáveis.

4. **Esse é o problema 3.6 do Carroll. Veja a solução aqui:** `http://www.physics.utah.edu/~sandick/7720fall2016/Homework3Sols.pdf`

5. **Esse é o problema 3.8 do Carroll.**

   a) Veja a seção 3.3 do Carroll, a partir da equação 3.44. Substitua a métrica dada na equação 3.49 do Carroll. Escreva então as equações de Euler-Lagrange e compare com as equações das geodésicas para encontrar os símbolos de Christoffel. Se quiser, repita as contas no Mathematica e compare os resultados.

   b) Faça diretamente a partir dos símbolos de Christoffel. Se quiser, pode fazer também no Mathematica e comparar os resultados.

9. **Eletromagnetismo na Relatividade:** veja o problema 4.25 do Schutz.

   a) No referencial de repouso do observador $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$.

   b) Basta levantar os índices usando a métrica do espaço-tempo plano.

   c,d,e) Trabalhe no referencial de repouso do observador. Veja os problemas/soluções 4.8 e 4.9 do Lightman.

   f,g) Veja as páginas 64, 65, 70, 71 do Wald. Veja a página 43 do Carroll. Veja os problemas/soluções 14.15 e 14.16 do Lightman.

11. **Espaço-tempo esfericamente simétrico:** está no arquivo do Mathematica que enviei.