

# Lista 4 - FIS 404 - Relatividade Geral

Equações de Einstein, ondas gravitacionais, buracos negros

2º quadrimestre de 2017 - Professor Maurício Richartz

**Leitura sugerida:** Carroll (seções 4.1-4.2,4.4, e capítulos 5, 6, e 7), Wald (seções 4.3-4.4 e capítulo 6).

1. **Limite Newtoniano:** o limite Newtoniano da Relatividade Geral consiste nas seguintes três hipóteses: **(i)** a métrica do espaço-tempo ( $g_{\mu\nu}$ ) é a métrica do espaço-tempo plano ( $\eta_{\mu\nu}$ ) com correções ( $h_{\mu\nu}$ ), de modo que  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , sendo  $h_{\mu\nu} \ll 1$  (em um dado sistema de coordenadas); **(ii)** as velocidades relativas entre as fontes são pequenas comparadas a velocidade da luz, e os termos de stress (pressão e cisalhamento) são desprezíveis; **(iii)** como as fontes se movem lentamente, as componentes da métrica devem ser estáticas.

- a) Mostre que quando a condição (i) é aplicada à equação de Einstein, obtemos (em primeira ordem para  $h_{ab}$ ) a seguinte equação:

$$-\frac{1}{2}\partial^c\partial_c\bar{h}_{ab} + \partial_{(b}\bar{h}_{a)c} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^c\partial^d\bar{h}_{cd} = 8\pi T_{ab},$$

onde  $\bar{h}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h^c_c$ . OBS: como estamos trabalhando em primeira ordem, podemos levantar e abaixar índices usando  $h_{ab}$  e  $h^{ab}$  ao invés de  $g_{ab}$  e  $g^{ab}$ .

- b) Explique que existe uma liberdade de gauge na definição de  $h_{ab}$  e mostre que é possível fixar esse gauge de tal maneira a transformar a equação acima em:

$$\partial^c\partial_c\bar{h}_{ab} = -16\pi T_{ab}. \quad (1)$$

- c) A condição (ii) pode ser traduzida matematicamente na existência de um sistema de coordenadas  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  no qual o tensor stress-energia-momento é simplesmente  $T_{\mu\nu} \approx \rho t_\mu t_\nu$ , onde  $t^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^\mu$  é a “direção temporal” nesse sistema de coordenadas. A condição (iii), por sua vez, significa  $\partial h_{ab}/\partial x^0 = 0$ . Mostre que as condições (ii) e (iii), aplicadas à equação (1), implicam em  $\nabla^2\bar{h}_{ab} = -16\pi\rho$  se  $\mu = \nu = 0$  e  $\nabla^2\bar{h}_{ab} = 0$  caso contrário ( $\nabla^2$  é o Laplaciano espacial usual). Conclua que  $\phi = -\frac{1}{4}\bar{h}_{00}$  satisfaz a equação de Poisson e, portanto, a equação de Einstein leva à equação de Poisson no limite Newtoniano.

- d) Mostre que, em termos de  $\phi$ , a perturbação da métrica pode ser escrita como  $h_{ab} = -(4t_a t_b + 2\eta_{ab})\phi$ .

## 2. Efeito Lense-Thirring

- a) Mostre que no limite Newtoniano a equação da geodésica se reduz à segunda lei de Newton  $\vec{a} = -\nabla\phi$ .
- b) É interessante investigar o que ocorre quando efeitos de primeira ordem na velocidade relativa entre as fontes é levado em consideração. Nesse caso, ao invés de desprezar as componentes de stress e de momento em  $T_{\mu\nu}$  de modo que  $T_{\mu\nu} \approx \rho t_\mu t_\nu$ , desprezamos apenas as componentes de stress de modo a ter  $T_{\mu\nu} \approx 2t_{(\mu}J_{\nu)} - \rho t_\mu t_\nu$ , onde  $J_\nu = -T_{\mu\nu}t^\mu$  é o quadri vetor densidade de corrente de massa-energia. Mostre que as equações de Einstein linearizadas agora implicam que  $\partial^a\partial_a\bar{h}_{\mu\nu} = 0$  se  $\mu, \nu \neq 0$  e  $\partial^a\partial_a\bar{h}_{\mu 0} = 16\pi J_\mu$  caso contrário.

- c) Conclua que  $A_a = -\frac{1}{4}\bar{h}_{ab}t^b$  satisfaz as equações de Maxwell no gauge de Lorentz sendo a fonte exatamente o quadrivetor densidade de corrente de massa-energia  $J^a$ . Mostre que se desprezarmos derivadas temporais da métrica, então as componentes espaciais de  $\bar{h}_{ab}$  se anulam.
- d) Escreva a equação da geodésica para uma partícula nesse espaço-tempo e deduza (em primeira ordem na velocidade da partícula  $\vec{v}$ ) que sua aceleração é  $\vec{a} = -\vec{E} - 4\vec{v} \times \vec{B}$ , onde  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são definidos em termos de  $A_a$  da mesma maneira que no eletromagnetismo. Comparando esse resultado com a força de Lorentz do eletromagnetismo e a segunda Lei de Newton, (fazendo  $m = q$  e levando em conta um sinal global negativo e o fator 4 na força magnética), podemos deduzir que a gravitação linearizada produz efeitos análogos ao eletromagnetismo. Existe uma extensa literatura sobre essa analogia, conhecida como gravitoeletromagnetismo.
- e) Mostre que os “campos gravitacionais elétrico e magnético” definidos acima, dentro de uma casca esférica de massa  $M$  e raio  $R \gg M$  que gira lentamente com uma velocidade angular  $\vec{\omega}$ , são dados por

$$\vec{E} = 0, \quad \vec{B} = \frac{2M}{3R}\vec{\omega}.$$

Um observador em repouso no centro da casca transporta paralelamente ao longo de sua linha de mundo um vetor  $S^a$  que satisfaz  $S^a u_a = 0$ , onde  $u^a$  é a tangente da sua linha de mundo (que é uma geodésica). Mostre que as componentes inerciais,  $\vec{S}$ , precessam de acordo com  $d\vec{S}/dt = \vec{\Omega} \times \vec{S}$ , onde  $\vec{\Omega} = 2\vec{B} = \frac{4M}{3R}\vec{\omega}$ . Esse efeito foi previsto pela primeira vez em 1918 por Lense e Thirring e pode ser interpretado como o arrasto de referenciais inerciais causado pela casca esférica em rotação. No centro da casca, a noção de sem “rotação”, definida pelo transporte paralelo ao longo de uma geodésica, é diferente do que seria sem a presença da casca (em acordo com o princípio de Mach).

### 3. Onda gravitacional exata: considere a métrica

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + L^2(e^{2\beta} dx^2 + e^{-2\beta} dy^2),$$

onde  $L$  e  $\beta$  dependem apenas da diferença  $t - z$ .

- a) Escolha novas coordenadas  $u = t - z$  e  $v = t + z$ , mantendo  $x$  e  $y$  inalterados. Escreva a métrica nesse novo sistema de coordenadas.
- b) Calcule o tensor de Ricci para essa geometria e mostre que a única componente não nula é

$$R_{uu} = -\frac{2}{L} (L'' + (\beta')^2 L).$$

- c) Encontre o limite desse espaço tempo que corresponde a uma onda gravitacional de pequena amplitude. Qual é a polarização dessa onda linearizada?

### 4. Teoria de Nordström: entre 1912 e 1913, Gunnar Nordström propôs duas teorias de gravitação para substituir a gravitação de Newton. A primeira foi rapidamente rejeita, enquanto a segunda pode ser considerada a primeira teoria métrica de Gravitação, precedendo a Relatividade Geral de Einstein. Foi o próprio Einstein, juntamente com Fokker (que havia acabado de obter seu doutorado com a orientação de Lorentz), que em 1914 mostrou como formular a teoria de Nordström como uma teoria métrica.

- a) Considere um espaço-tempo cuja métrica tem a forma  $g_{ab} = \phi^2 \eta_{ab}$ , onde  $\eta_{ab}$  é a métrica plana da Relatividade Especial e  $\phi$  é uma função dos pontos do espaço-tempo. Mostre que a equação de campo  $R = 24\pi T$ , onde  $T = g^{ab} T_{ab}$  é equivalente à equação  $\partial^a \partial_a \phi = \eta^{ab} \partial_a \partial_b \phi = -4\pi \phi \eta^{ab} T_{ab}$ .
- b) Determine se o limite Newtoniano dessa teoria concorda com a teoria de Newton, isto é se no limite Newtoniano dessa teoria conseguimos recuperar a equação de Poisson.
- c) Determine se a equação geodésica para partículas lentas se reduz a segunda lei de Newton para uma partícula num campo gravitacional externo.
5. (\*\*\*) **Cosmologia:** assumindo que o Universo é homogêneo e isotrópico, sua métrica (no caso espacialmente plano) possui a forma

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

onde  $a = a(\tau)$  é uma função do tempo próprio  $\tau$  medido por qualquer observador isotrópico.

- a) Considerando um fluido perfeito (densidade  $\rho$  e pressão  $P$ ), mostre que as equações de Einstein são equivalentes às seguintes equações para  $a(\tau)$ :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi\rho}{3}, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3P)$$

Essas equações são conhecidas como equações de Friedmann. Note que, em geral,  $\rho$  e  $P$  são funções de  $\tau$ .

- b) Mostre que as equações de Friedmann implicam que  $\dot{\rho} + 3(\rho + P)\frac{\dot{a}}{a} = 0$ .
- c) Alternativamente, obtenha a equação  $\dot{\rho} + 3(\rho + P)\frac{\dot{a}}{a} = 0$  a partir da conservação de energia-momento:  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ .
- d) Além das equações de Friedmann, precisamos de um equação de estado que relaciona  $P$  com  $\rho$  para determinar a evolução do Universo. A maioria dos fluidos de interesse para a cosmologia obedece a equação de estado  $P = w\rho$ , onde  $w$  é uma constante. Quando  $w = 0$ , dizemos que o universo é dominado por matéria; quando  $w = 1/3$ , dizemos que o universo é dominado por radiação; quando  $w = -1/3$ , dizemos que o universo é dominado por curvatura; quando  $w = -1$ , dizemos que o universo é dominado por vácuo. Encontre uma fórmula explícita para  $a = a(\tau)$  nesses quatro casos. Faça um esboço do gráfico de  $a(\tau)$  considerando uma condição inicial  $a(0)$  arbitrária. O que acontece com  $a(\tau)$  em cada caso a medida em que  $\tau$  cresce?
6. (\*\*\*) **Teorema de Birkhoff:** utilizando os resultados do exercício 11 da lista 3, resolva as equações de Einstein no vácuo ( $T_{\mu\nu} = 0$ ) para um espaço-tempo esfericamente simétrico e conclua que a única solução possível é a métrica de Schwarzschild.

## 7. Buracos de minhoca:

- a) Mostre que a métrica de Schwarzschild pode ser escrita como

$$ds^2 = -\left(\frac{1 - M/2r'}{1 + M/2r'}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^4 [dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)],$$

onde  $r'$  se relaciona com a coordenada radial usual  $r$  através de  $r = r'(1 + M/2r')^2$ . As coordenadas  $(t, r', \theta, \phi)$  são chamadas coordenadas isotrópicas pois: a parte espacial é uma

função de  $r'$  multiplicada pela métrica euclidiana 3-dimensional que, por sua vez, não tem nenhuma direção especial.

- b) Mostre que em coordenadas isotrópicas  $r'$  é sempre uma coordenada espacial, isto é,  $\vec{e}_{r'} = \partial_{r'}$  é sempre um vetor tipo espaço. Compare com a coordenada usual de Schwarzschild, mostrando que esta é uma coordenada espacial se  $r > 2M$  e é uma coordenada temporal quando  $0 < r < 2M$ .
- c) Considere a superfície equatorial bidimensional definida por  $t = \text{constante}$ ,  $\theta = \text{constante} = \pi/2$ . Construa um “diagrama de mergulho” para essa superfície usando coordenadas isotrópicas. Isto é, em um espaço euclidiano plano com coordenadas  $(\bar{r}, \bar{z}, \bar{\phi})$  e métrica  $ds^2 = d\bar{r}^2 + d\bar{z}^2 + \bar{r}^2 d\bar{\phi}^2$ , construa uma superfície bidimensional parametrizada por  $r'$  e  $\theta$  cuja métrica induzida é

$$ds^2 = \left(1 + \frac{M}{2r'}\right)^4 (dr'^2 + r'^2 d\phi^2).$$

Essa superfície é um buraco de minhoca que conecta dois espaços assintoticamente planos.

- d) Encontre uma equação  $\bar{z} = \bar{z}(\bar{r})$  para a curva que, ao ser rotacionada, gera uma superfície de revolução idêntica à superfície encontrada em b).
8. (\*\*\*) **Singularidades e horizonte de eventos:** um ponto singular na métrica de um espaço-tempo pode corresponder a uma singularidade física, representando um ponto no qual geodésicas não podem ser estendidas de uma maneira suave. Mas, por outro lado, a singularidade pode ser devido a uma má escolha do sistema de coordenadas. Nesse caso, com uma mudança adequada de coordenadas, a singularidade é removida.

- a) A métrica de Schwarzschild nas coordenadas usuais,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

é singular para  $r = 0$  e  $r = 2M$ . Uma maneira de se determinar se uma singularidade é física, é encontrar algum escalar (invariante) relacionado apenas à curvatura do espaço-tempo que seja divergente. O escalar mais simples de todos é o escalar de curvatura  $R$ . Uma outra possibilidade é utilizar o escalar de Kretschmann  $K = R_{abcd}R^{abcd}$ . Na métrica de Schwarzschild, o escalar de curvatura é identicamente nulo. Mostre que, no entanto, o escalar de Kretschmann diverge em  $r = 0$ , mas é bem comportado em  $r = 2M$ . Use esse fato para concluir que  $r = 0$  é uma singularidade física e que nada podemos afirmar sobre  $r = 2M$ .

- b) Mostre que se mudarmos as coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  para  $(v, r, \theta, \phi)$ , onde  $t = v - r - 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|$  a métrica usual de Schwarzschild se torna

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

A métrica de Schwarzschild nessa forma é chamada de métrica de Eddington-Finkelstein. A partir dessa métrica, conclua que a coordenada  $r = 2M$  não é singularidade física.

- c) Apesar do ponto  $r = 2M$  não corresponder a uma singularidade, ele corresponde a uma superfície muito importante do espaço-tempo. Para entender isso, basta estudar o comportamento de raios de luz radiais. Fazendo  $d\theta = d\phi = 0$  (trajetória radial) na métrica de

Eddington-Finkelstein, e tomando  $ds^2 = 0$  (raios de luz), temos

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dvdr = 0$$

Resolva a equação acima para mostrar que, em cada ponto, existem dois tipos de raios de luz nessas coordenadas:  $v = \text{constante}$  e  $v - 2r - 4M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| = \text{constante}$ . Em cada ponto do espaço-tempo, essas duas direções determinam o cone de luz no ponto. Definindo uma nova coordenada temporal  $\tilde{t} = v - r$ , analise o comportamento desses cones de luz em função da posição  $r$ . Mostre que se  $r < 2M$  os raios de luz inevitavelmente chegam à singularidade em  $r = 0$  em algum instante de tempo  $\tilde{t}$  futuro. Se, por outro lado,  $r > 2M$  um dos raios de luz inevitavelmente atinge a singularidade, mas o outro escapa para  $r = \text{infinito}$ . Faça um gráfico das direções dos cones de luz em cada ponto do plano  $r$ - $\tilde{t}$ .

d) Considere o espaço-tempo cuja métrica é dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \phi^2).$$

As coordenadas  $r = 0$  e  $r = M$  representam pontos singulares nessas coordenadas. Repetindo o raciocínio anterior, mostre que existem novas coordenadas  $(v, r, \theta, \phi)$  nas quais essa métrica tem componente  $g_{rr} = 0$  e na qual  $r = M$  não é um ponto singular. Faça um diagrama dos cones de luz no plano  $r$ - $\tilde{t}$  análogo ao que você fez para Schwarzschild, e determine se  $r = M$  representa um horizonte de eventos ou não.

### 9. (\*\*\*) Trajetórias na geometria de Schwarzschild:

- Determine as equações de movimento (i.e. as equações envolvendo  $t = t(\tau)$  e  $r = r(\tau)$ ) que regem o movimento de uma partícula em trajetória radial no espaço-tempo de Schwarzschild. Quando possível, elimine o tempo próprio  $\tau$  para encontrar uma relação do tipo  $r = r(t)$  ou  $t = t(r)$ . Considere três casos: (i) partícula parte do repouso em  $r = R$ ; (ii) partícula parte do repouso em  $r = \infty$ ; partícula lançada a partir de  $r = \infty$  em direção a  $r = 0$  com velocidade inicial  $v_\infty$ .
- Para o caso (i) acima, mostre que o tempo próprio para que a partícula chegue ao horizonte de eventos ( $r = 2M$ ) é finito. Mostre, no entanto, que o tempo coordenado  $t$  que se passa até que a partícula atinja o horizonte de eventos é infinito.
- Deduza a equação diferencial de primeira ordem que determina a trajetória ( $r$  em função de  $\phi$ ) de órbitas equatoriais na geometria de Schwarzschild;
- Mostre que a trajetória de raios de luz na métrica de Schwarzschild obedecem à equação

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3u^2, \quad u = \frac{M}{r},$$

onde  $r$  é a coordenada radial de Schwarzschild. Denote o valor mínimo de  $r$  ao longo da trajetória como sendo  $b$  (denominado parâmetro de impacto). Se  $M \ll b$ , qual é a deflexão de um fóton que passa perto de um corpo gravitacional esférico? (Dê uma fórmula para o ângulo de deflexão em primeira ordem em potências de  $M/b$ .)

- Para uma órbita planetária quase Newtoniana (i.e.  $M/r \ll 1$ ), calcule em primeira ordem em  $M/r$  o avanço do periastro, por órbita, previsto pela Relatividade Geral.

- f) Mostre que um foguete que atravessa o horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild irá eventualmente atingir a singularidade em  $r = 0$  num tempo próprio  $\tau \leq \pi M$ , independentemente de como e quando os motores do foguete forem acionados.
10. (\*\*\*) **Redshift/Blueshift:**
- a) Um foguete espacial em órbita circular de raio  $r$  em torno de uma estrela de massa  $M$  aciona sua arma laser (cuja frequência de repouso é  $\nu_0$ ). O disparo ocorre no plano orbital sendo que a arma está apontada a um ângulo  $\alpha$  (no referencial do foguete) em relação à direção tangencial de movimento. Qual é a frequência do laser vista por um observador estacionário no infinito?
- b) Um radialista está descrevendo sua queda radial em direção ao interior de um buraco negro de Schwarzschild. Logo antes dele atravessar o horizonte de eventos, sua frequência de transmissão se torna enormemente desviada para o vermelho, com uma dependência temporal do tipo  $e^{-t/\text{constante}}$ , onde  $t$  mede o tempo próprio de um ouvinte no infinito. A partir da constante determine a massa do buraco negro.
11. **Campo escalar sem massa:** um campo escalar  $\Phi$ , com massa  $m$ , satisfaz a equação de Klein-Gordon  $(\nabla_\mu \nabla^\mu + m^2) \Phi = 0$ .
- a) Demonstre a seguinte identidade, válida em qualquer espaço-tempo:  $\Gamma_{\mu\lambda}^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\lambda \sqrt{|g|}$ . Use esse fato para mostrar que o divergente de um vetor qualquer  $V^\mu$  é dado por  $\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} V^\mu)$ . Conclua, finalmente, que a equação de Klein-Gordon, em qualquer espaço-tempo, pode ser escrita como
- $$-\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{|g|} \partial_\nu \Phi) + m^2 \Phi = 0.$$
- b) Considere um campo sem massa. No caso da métrica de Schwarzschild podemos separar as coordenadas se utilizarmos o *ansatz*  $\Phi(t, r, \theta, \phi) = r^{-1} \psi(r, t) S(\theta, \phi)$ . Mostre que, com esse *ansatz*,  $S(\theta, \phi)$  são simplesmente os harmônicos esféricos  $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$  e  $\psi(t, r)$  satisfaz a equação
- $$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + V_\ell(r) \psi,$$
- onde  $V_\ell(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[ \frac{2M}{r^3} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right]$ .
- ,
12. (\*\*\*) **Métrica de Reissner-Nordström:** considere as equações de Maxwell no vácuo (i.e.  $\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0$  e  $\nabla_{[a} F_{bc]} = 0$ ) em um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico (i.e.  $ds^2 = -e^{2\nu(r)} dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$ , onde  $\nu(r)$  e  $\lambda(r)$  são funções arbitrárias de  $r$ ).
- a) Definindo uma base de covetores  $\{e^{\hat{0}}, e^{\hat{1}}, e^{\hat{2}}, e^{\hat{3}}\}$  através de  $e^{\hat{0}} = e^{\nu(r)} dt$ ,  $e^{\hat{1}} = e^{\lambda(r)} dr$ ,  $e^{\hat{2}} = r d\theta$ ,  $e^{\hat{3}} = r \sin \theta d\phi$  (essa não é uma base coordenada), a métrica se torna a métrica de Minkowski. Por isso, a forma geral do tensor eletromagnético  $F_{\hat{a}\hat{b}}$  nessa base  $\{e^{\hat{a}}\}$  é dada no exercício 9a da

lista 3. Para que  $F_{\hat{a}\hat{b}}$  possua as mesmas simetrias do espaço-tempo, o tensor eletromagnético deve ter a forma

$$F_{\hat{a}\hat{b}} = \begin{bmatrix} 0 & -A(r) & 0 & 0 \\ A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B(r) \\ 0 & 0 & -B(r) & 0 \end{bmatrix},$$

onde  $A(r)$  e  $B(r)$  são funções de  $r$  apenas. Reescreva o tensor eletromagnético na base coordenada  $\{dt, dr, d\theta, d\phi\}$ . Resolva as equações de Maxwell para encontrar  $A(r)$  e  $B(r)$ . Interprete fisicamente as constantes de integração que aparecem em sua resposta.

- b) Assumindo que  $B(r) = 0$ , resolva as equações de Einstein  $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$ , sendo  $T_{ab} = \frac{1}{4\pi} (F_{ac}F_b^c - \frac{1}{4}g_{ab}F_{de}F^{de})$  o tensor stress-energia-momento do eletromagnetismo. O resultado obtido deverá ser a métrica de Reissner-Nordström (RN):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \phi^2),$$

onde  $M$  e  $Q$  representam, respectivamente, a massa e a carga elétrica do espaço-tempo.

- c) Supondo  $|Q| > M$ , mostre que o único ponto singular dessa métrica, nessas coordenadas, é a origem  $r = 0$ . Calcule o escalar de Kretschmann para concluir que a origem é uma singularidade física? A métrica de RN nesse caso representa uma singularidade nua, pois a singularidade física em  $r = 0$  não está envolta por um horizonte de eventos de um buraco negro.
- d) Um observador em uma órbita circular de raio  $R$  na métrica de Reissner-Nordström mede localmente um campo elétrico e um campo magnético. Quais são as suas magnitudes e direções?
13. **Métrica de Kerr:** um buraco negro de massa  $M$  que gira com momento angular  $J$ , é descrito pela seguinte métrica:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4Mr a \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi dt + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta d\phi^2,$$

onde  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ ,  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ , e  $a = J/M$  é o momento angular específico (que satisfaz a desigualdade  $0 \leq a \leq M$ ). As coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  acima são denominadas coordenadas de Boyer-Lindquist. Se  $a = 0$  recuperamos a métrica de Schwarzschild. Observe que a métrica de Kerr (por ser estacionário e axissimétrica) não depende explicitamente de  $t$  nem de  $\phi$  e, portanto,  $\xi_t = \frac{\partial}{\partial t}$  e  $\xi_\phi = \frac{\partial}{\partial \phi}$  são vetores de Killing.

- a) Encontre os pontos singulares da métrica de Kerr nas coordenadas de Boyer-Lindquist. É possível mostrar que a singularidade em  $r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$  é devido a uma má escolha das coordenadas e corresponde ao horizonte de eventos do buraco negro de Kerr.
- b) Mostre que a lei de Kepler  $\Omega^2 = \frac{M}{r^3}$ , onde  $r$  é a coordenada usual e  $\Omega$  é a frequência angular medida no infinito, vale exatamente para órbitas circulares em torno de um buraco negro de Schwarzschild. Encontre uma lei análoga para órbitas equatoriais em torno de um buraco negro de Kerr com momento angular específico  $a$ .

- c) Um observador (não necessariamente em queda livre) orbita um buraco negro de Kerr no plano equatorial ( $\theta = \pi/2$ ). Suponha que essa órbita tem  $r = \text{constante}$ . Defina  $\Omega = d\phi/dt$  como sendo a velocidade angular desse observador relativa a um outro observador estacionário no infinito. Em termos de  $\Omega$ ,  $r$ ,  $a$  e  $M$ , determine  $u^t$ ,  $u^\phi$ ,  $u_t$  e  $u_\phi$ . Mostre que  $\Omega \rightarrow \Omega_h = \frac{a}{2Mr_+}$  quando  $r \rightarrow r_+$ . Esse valor é interpretado como a velocidade angular do horizonte de eventos.
- i. Mostre que se  $r$  for suficientemente grande, é possível ter  $dr/dt = d\phi/dt = 0$ .
  - ii. Seja  $r_- = M - \sqrt{M^2 - a^2}$ . Mostre que se  $r_- < r < r_+$ , então  $dr/dt < 0$ .
  - iii. Mostre que existe uma superfície definida por  $r = re(\theta)$  e que satisfaz  $re(\phi) \gg r_+$  para todo  $\phi$  com a seguinte propriedade: se  $r_+ \leq r \leq re(\theta)$ , então  $dr/dt = 0$  mas é impossível ter  $d\phi/dt = 0$ . A região delimitada por  $r = re(\theta)$  é denominada ergosfera. Determine explicitamente a equação  $re(\theta)$ .
- d) Mostre que o vetor de Killing  $\xi_t$  é tipo-tempo fora da ergosfera (i.e. se  $r > re(\theta)$ ) e é tipo-espaço dentro dela (i.e. se  $r_+ < r < re(\theta)$ ). O mesmo acontece para o vetor de Killing  $\chi = \xi_t + \Omega_h \xi_\phi$ ? (OBS: como  $\xi_t$  e  $\xi_\phi$  são vetores de Killing, qualquer combinação linear entre eles também é vetor de Killing - é o caso de  $\chi$ .)
- e) Uma partícula que percorre uma geodésica na métrica de Kerr tem sua energia  $E = -p_\mu \xi_t^\mu$  e seu momento angular  $L = p_\mu \xi_\phi^\mu$  conservados. Assumindo que a geodésica esteja no plano equatorial, determine  $E$  e  $L$  em termos da trajetória da partícula, i.e.  $x^\mu(\tau) = (t(\tau), r(\tau), \theta(\tau), \phi(\tau))$ .
- f) Mostre que é um foguete pode extrair energia de um buraco negro de Kerr ejetar parte de sua carga de maneira correta quando passar pela ergosfera do buraco negro. Para que isso ocorra, a carga ejetada deve girar no mesmo sentido ou no sentido contrário do buraco negro? Esse processo de extração de energia é conhecido como Processo de Penrose.