

Lista 4 - FIS 404 - Relatividade Geral

Equações de Einstein, ondas gravitacionais, buracos negros

2º quadrimestre de 2017 - Professor Maurício Richartz

Leitura sugerida: Carroll (seções 4.1-4.2,4.4, e capítulos 5, 6, e 7), Wald (seções 4.3-4.4 e capítulo 6).

5. Cosmologia:

- a) O tensor energia momento de um fluido perfeito na RG é dado por $T^{\mu\nu} = (\rho+P)U^\mu U^\nu + Pg^{\mu\nu}$, onde U^α é a quadrivelocidade do fluido. Como o Universo é isotrópico, o fluido deverá estar em repouso para qualquer observador isotrópico, isto é, $U^\alpha = (1, 0, 0, 0)$. [Para uma discussão mais geral, veja as seções 5.1 e 5.2 do Wald (em particular as equações 5.1.10, 5.2.3 e 5.2.4).] Usando a métrica e $U^\alpha = (1, 0, 0, 0)$, mostre que $T_{\mu\nu} = \text{diag}(-\rho, Pa^2(\tau), Pa^2(\tau), Pa^2(\tau))$. A partir da métrica, encontram-se os símbolos de Christoffel. Os únicos não nulos são (a menos de simetrias) $\Gamma_{11}^0 = \Gamma_{22}^0 = \Gamma_{33}^0 = \dot{a}a$ e $\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \dot{a}/a$. As componentes não nulas do tensor de Ricci são $R_{00} = -3\ddot{a}/a$ e $R_{11} = R_{22} = R_{33} = a\ddot{a} + 2\dot{a}^2$. O escalar de Ricci é $R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)$. Substituindo nas equações de Einstein encontramos as equações de Friedmann
- b) Derive a equação de Friedmann que só depende de ρ para encontrar $\dot{\rho}$ em termos de a , \dot{a} e \ddot{a} . Utilize a outra equação de Friedmann para eliminar \ddot{a} , e encontrar a equação pedida.
- c) Calcule $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda}$. Tem-se que $\nabla_\mu T^{\mu 1}$, $\nabla_\mu T^{\mu 2}$, e $\nabla_\mu T^{\mu 3}$ são identicamente nulos e $\nabla_\mu T^{\mu 0} = \dot{\rho} + 3(\rho + P)\frac{\dot{a}}{a}$.
- d) Como $P = w\rho$ temos $\dot{\rho} + 3(w+1)\rho\frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \rho \propto a^{-3(1+w)}$. Substituindo nas equações de Friedmann, temos

$$\dot{a} \propto a^{1-\frac{3}{2}(1+w)} \Rightarrow a \propto \tau^{\frac{2}{3(1+w)}}, \text{ se } w \neq -1 \text{ (o que acontece se } w = -1\text{?)}$$

6. **Teorema de Birkhoff:** está feito no arquivo do Mathematica que enviei a vocês.

8. Singularidades e horizonte de eventos:

- a) Utilizando o tensor de Riemann calculado no ex 11 da lista 3, temos que $K = \frac{48M^2}{r^6}$.
- c) Olhe a seção 5.6 do Carroll. Será feito em sala no dia 22/08.
- d) Seguindo a lógica de b), faça $t = v - \int g_{rr} dr = v - \int \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-2} dr$.

9. **Trajatórias na geometria de Schwarzschild:** em breve

10. **Redshift/Blueshift:** em breve

12. **Métrica de Reissner-Nordström:** em breve