


Introdução às EDO – BCN 0405
2º quad. 2017 – Diurno – Santo André
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Primeira Prova – Versão Y – 07/07/2017

Nome	RA
<i>Resolução e gabarito de correção</i>	

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta preta ou azul.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use lápis para responder as questões. Não é necessário nem recomendável passar respostas a caneta.
- Nada fora dos quadros de resposta será considerado na correção. Cada um deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente lápis, caneta, borracha e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém 3 (três) páginas, incluindo esta, e 3 (três) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva as equações, apresentando apenas as soluções finais. A primeira equação está resolvida como exemplo. (4pts)

Ex.: $y' = -5y$.

$y(x) =$

Ce^{-5x}

(a) $\frac{1}{x} dx - \frac{1}{y} dy = 0$.

$y(x) =$

Cx

(1pt)

(b) $xy' - y = x^2e^{-x}$.

$y(x) =$

$-xe^{-x} + Dx$

(1pt)

(c) $x^3yy' = x^4 + 3x^2y^2 + y^4$.

$y(x) =$

$\pm x \sqrt{\frac{\ln x^2 - C + 1}{C - \ln x^2}}$

(1pt)

(use $y = xz$)

(d) $y' = (1 + 2e^x)y - y^2 - e^{2x}$.

$y(x) =$

$e^x + \frac{1}{1 + Ce^{-x}}$

(1pt)

(use $y = e^x + z^{-1}$)

(Sugestão: confira seus resultados por substituição!)

(a) (Lista 1, ex 5b) Separação de variáveis: $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C$ etc.

(b) (Lista 1, ex. 6c) Linear: PH $xy' - y = 0 \Rightarrow y = Cx \Rightarrow$ VC: $x(C'x + C) - Cx = x^2e^{-x} \Rightarrow C' = e^{-x} \Rightarrow C = -e^{-x} + D \Rightarrow y = (-e^{-x} + D)x$.

(c) (Lista 1, ex. 5c) Homogênea: $x^3(xz)(xz)' = x^4 + 3x^2(xz)^2 + (xz)^4 \Rightarrow x^4z(z+xz) = x^4 + 3x^4z^2 + x^4z^4 \Rightarrow xz z' = 1 + z^2 + z^4 = (1+z^2)^2 \Rightarrow \frac{z dz}{(1+z^2)^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{2}(1+z^2)^{-1} = \ln|x| + C \Rightarrow 1+z^2 = \frac{1}{C_2 - \ln x^2} \Rightarrow z = \pm \sqrt{\frac{1 - C_2 + \ln x^2}{C_2 - \ln x^2}}$ etc.

(d) (Lista 1, ex. 12c3) Riccati: $(e^x + z^{-1})' = (1 + 2e^x)(e^x + z^{-1}) - (e^x + z^{-1})^2 - e^{2x} \Rightarrow e^x - z^{-2}z' = e^x + z^{-1} + 2e^{2x} + 2e^x z^{-1} - e^{2x} - 2e^x z^{-1} - z^{-2} - e^{2x} \Rightarrow -z^{-2}z' = z^{-1} - z^{-2} \Rightarrow z' = -z + 1 \Rightarrow \frac{dz}{1-z} = dx \Rightarrow -\ln|1-z| = x + C \Rightarrow z = 1 - C_2 e^{-x}$ etc.

(2) Suponha que um corpo com temperatura desconhecida é colocado em um refrigerador mantido à temperatura constante de -20°C . Se após 20 minutos a temperatura do corpo é 40°C e após 40 minutos é 20°C , qual é a temperatura inicial do corpo? (3pts)

(Lista 2, ex. 4b) Esfriamento de Newton: PVI $\dot{T} = -a(T-A)$, $T(0) = T_0 \Rightarrow$
 \Rightarrow solução $T = A + (T_0 - A)e^{-at}$ (1pt). (eq. autônoma por sep. variáveis)

Dados numéricos: $\begin{cases} 40 = -20 + (T_0 + 20)e^{-a \cdot 20} \\ 20 = -20 + (T_0 + 20)e^{-a \cdot 40} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 60 = (T_0 + 20)e^{-a \cdot 20} \\ 40 = (T_0 + 20)e^{-a \cdot 40} \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{e^{-a \cdot 20}}{e^{-a \cdot 40}} = e^{a \cdot 20} \Rightarrow 20a = \ln \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{20} \ln \frac{3}{2}$ (1pt) \Rightarrow

$\Rightarrow 60 = (T_0 + 20) \exp\left(-\left(\frac{1}{20} \ln \frac{3}{2}\right) \cdot 20\right) = (T_0 + 20) \exp\left(\ln \frac{2}{3}\right) \Rightarrow 60 = \frac{2}{3}(T_0 + 20)$

$\Rightarrow T_0 = 70^{\circ}\text{C}$ (1pt).

(3) Determine e classifique os equilíbrios da equação $y' = (y^2 - 3y + 2)e^y$. (3pts)

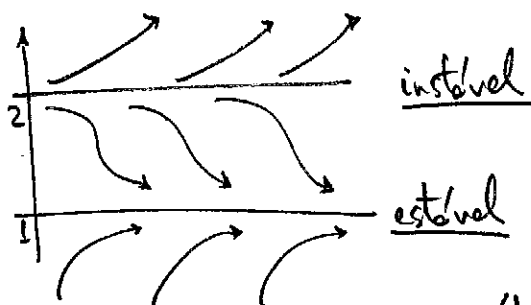
(Lista 2, ex. 9d) Equação autônoma $y' = g(y) = (y^2 - 3y + 2)e^y \Rightarrow$ raízes de g são 1 e 2 equilíbrios (1pt).

Estudo dos sinais de g :

	1	2	y
e^y	\oplus	\oplus	\oplus
$y-1$	\ominus	\oplus	\oplus
$y-2$	\ominus	\ominus	\oplus
$g(y)$	\oplus	\ominus	\oplus

(1pt)

Estudo do comportamento de y :



(1pt)