

Introdução às EDO – BCN 0405
2º quad. 2022 – Diurno – São Bernardo do Campo
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Primeira Prova – Versão X – 15/07/2022

Nome	RA
Resolução e pontuação	_____

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou “branquinho”. Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém 3 (três) folhas, incluindo esta, e 4 (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva as equações, apresentando apenas as soluções finais. A primeira equação está resolvida como exemplo. (4pts)

Ex.: $y' = -5y$.

$y(x) =$

$$Ce^{-5x}$$

(a) $y' = 2y + 3e^x$.

$y(x) =$

$$-3e^x + De^{2x}$$

(1pto)

(b) $y' = y + 2xe^{2x}$.

$y(x) =$

$$2xe^{2x} - 2e^{2x} + De^x$$

(1pto)

(c) $(y^2 + y)y' = -x^2 - 1$.

$y(x) =$

$$\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} = -\frac{x^3}{3} - x + C$$

(1pto)

(deixe a solução implícita)

(d) $y' = 6y \ln(2/y)$.

$y(x) =$

$$2 \exp(De^{-6x})$$

(1pto)

(use $y = 2e^{-z}$)

(Sugestão: confira seus resultados por substituição ou derivação implícita!)

(a) (Lista 1, ex. 6e.) Equação linear: parte homogênea $y' = 2y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2dx \Rightarrow \ln|y| = 2x + C_1 \Rightarrow y = Ce^{2x}$; variação da constante $C'e^{2x} + Ce^{2x} \cdot 2 = 2Ce^{2x} + 3e^x \Rightarrow C' = 3e^{-x} \Rightarrow C = -3e^{-x} + D$.

(b) (Lista 1, ex. 7a.) Equação linear: parte homogênea $y' = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \ln|y| = x + C_1 \Rightarrow y = Ce^x$; variação da constante $C'e^x + Ce^x = Ce^x + 2xe^{2x} \Rightarrow C' = 2xe^x \Rightarrow C = 2xe^x - 2e^x + D$.

(c) (Lista 1, ex. 5e.) Variáveis separáveis: $(y^2 + y) dy = -(x^2 + 1) dx \Rightarrow y^3/3 + y^2/2 = -x^3/3 - x + C$.

(d) (Também na versão Y. Lista 2, ex. 8b.) Pela substituição: $y = 2e^{-z} \Rightarrow y' = -2e^{-z} \cdot z' \Rightarrow -2e^{-z} \cdot z' = 6 \cdot 2e^{-z} \cdot \ln(2/2e^{-z}) \Rightarrow z' = -6z \Rightarrow \frac{dz}{z} = -6dx \Rightarrow \ln|z| = -6x + C_1 \Rightarrow z = Ce^{-6x}$.

(2) Suponha que a velocidade de leitura de um livro seja proporcional à quantidade restante de páginas a ler. Determine a quantidade lida em função do tempo, partindo do início do livro no instante zero. (2pts)

(Também na versão Y. Compare com a lista 2, ex 3a.)

Seja $Q(t)$ a quantidade lida, M o total e α a constante de proporcionalidade, temos: $Q' = \alpha(M - Q)$, $Q(0) = 0$. (1pt)

Resolução: $\frac{dQ}{M-Q} = \alpha dt \Rightarrow -\ln|M-Q| = \alpha t + C_1 \Rightarrow \ln|M-Q| = C_2 - \alpha t$

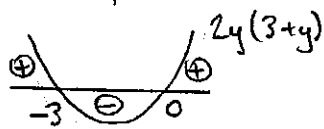
$\Rightarrow M - Q = C e^{-\alpha t} \Rightarrow Q = M + D e^{-\alpha t}$. Condição inicial: $Q(0) = 0 \Rightarrow 0 = M + D \cdot e^0 \Rightarrow D = -M \Rightarrow Q = M - M e^{-\alpha t}$. (1pt)

(3) Determine e classifique os equilíbrios de $y' = 2y(3 + y)$, sem a resolver. (2pts)

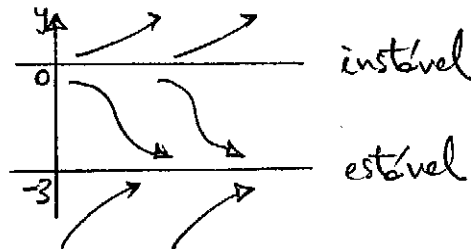
(Lista 2, ex. 9a.)

Equilíbrios: $y' = 0 \Rightarrow 2y(3 + y) = 0 \Rightarrow y = 0, y = -3$. (1pt)

Classificação:



(ou verbal)



instável

estável

(1pt)

(4) Mostre que as soluções estritamente positivas de $y' = e^y - 1$ são crescentes e não têm inflexão (não “mudam de concavidade”), sem resolver a equação. (2pts)

(Lista 2, ex. 9b.) Note que $y > 0 \Rightarrow e^y > 1$.

I) $y' = e^y - 1 > 1 - 1 = 0 \Rightarrow y$ é crescente. (1pt)

II) $y'' = [y']' = [e^y - 1]' = e^y \cdot y' = e^y(e^y - 1) > 0 \Rightarrow y$ é convexa (concavidade sempre para cima). (1pt)