/

Funções de Várias Variáveis – BCN 0407
2º quad. 2023 – Noturno – São Bernardo do Campo
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Primeira Prova – Versão Y – 07/07/2023

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva cada item, apresentando apenas as soluções finais. O primeiro item está resolvido como exemplo. (4pts)

Ex.: Determine a derivada parcial de $x^2y - 3x^y$ com respeito a y.

$$\boxed{x^2 - 3x^y \ln x}$$

(a) Determine $\frac{\partial}{\partial y}(x^2y - 3xy^2 + 2yz)$.

$$\boxed{x^2 - 6xy + 2z}$$

(1pto)

(b) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ sabendo que $\big(f(x,y)\big)^3 + (x+y)\big(f(x,y)\big)^2 + x^2 + y^2 = 34$.

$$\boxed{(-2x - (f(x,y))^2) / (3(f(x,y))^2 + (x+y)\cdot 2f(x,y))}$$

(1pto)

(c) Determine a reta normal à superfície $xz - yz^3 + yz^2 = 2$ no ponto $(2,-1,1)$.

$$\boxed{(2+\lambda, -1, 1+3\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}.}$$

(1pto)

(d) Calcule $\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xy\, dy\, dx\, dz$.

$$\boxed{17/20}$$

(1pto)

(a) Lista 3, ex. 2a. (b) Cf. lista 3, ex 19 e 20. Derivação implícita: aplique $\frac{\partial}{\partial x}$ a ambos os membros: $3(f)^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + (1+0)(f)^2 + (x+y)2(f)\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + 2x + 0 = 0 \Rightarrow$ isole $\frac{\partial f}{\partial x}$.

(c) Lista 4, ex 2.b. Com $f = xz - yz^3 + yz^2$, vem: $\nabla f = (z, -z^3+z^2, x - 3yz^2 + 2yz) \Rightarrow$

$\Rightarrow \nabla f(2,-1,1) = (1,0,3) \Rightarrow (x,y,z) = (2,-1,1) + \lambda \nabla f(2,-1,1) = (2+\lambda, -1, 1+3\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$.

(d) Lista 7, ex. 3a. $\int_0^1 \int_0^z \left[3xy^2\right]_{y=0}^{y=x+z} dx\, dz = \int_0^1 \int_0^z 3x(x+z)^2\, dx\, dz = \int_0^1 \int_0^z$

$(3x^3 + 6x^2z + 3xz^2)\, dx\, dz = \int_0^1 \left[\frac{3}{4}x^4 + 2x^3z + \frac{3}{2}x^2z^2\right]_{x=0}^{x=z} dz = \int_0^1 \left(\frac{3}{4}z^4 + 2z^4 + \frac{3}{2}z^4\right) dz =$

$= \int_0^1 \frac{17}{4} z^4\, dz = \left[\frac{17}{20} \cdot z^5\right]_{z=0}^{z=1} = 17/20.$

(2) Calcule: (a) a direção em que a derivada direcional de $\cancel{f(x,y)}$ $f(x,y,z)$ (aviso em sala) $= 3x^2 + y^2 + 4z^2$ em $(1,5,-2)$ tem valor máximo; (b) esse valor. (2pts)

Lista 4, ex 5a. (a) $\nabla f(x,y,z) = (6x, 2y, 8z) \rightarrow \nabla f(1,5,-2) = (6,10,-16)$ (1pto)

(b) $\frac{\partial f}{\partial u}(1,5,-2) = \langle \nabla f(1,5,-2) | u \rangle = \langle (6,10,-16) \,|\, \frac{(6,10,-16)}{\|(6,10,-16)\|} \rangle =$

$= \|(6,10,-16)\| = \sqrt{36+100+256} = \sqrt{392}$. (1pto)

(Também na versão X.)

(3) Sejam $f(u,v)$ diferenciável e $W = f(x^2+y^2, x^2-y^2)$. Calcule $\frac{\partial W}{\partial x}$. (2pts)

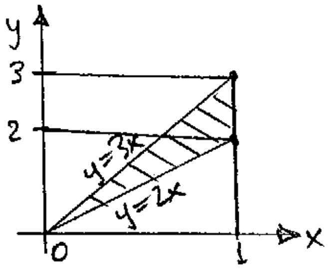
$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$ (1pto)

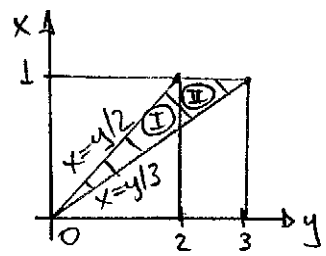
Com $u = x^2+y^2$ e $v = x^2-y^2$:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2x$$ (1pto)

(4) Inverta a ordem de integração de $\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y)\, dy\, dx$. (2pts)

Lista 6, ex 3c.





(1pto)

$$\rightarrow \underbrace{\int_0^2 \int_{y/3}^{y/2} f(x,y)\, dx\, dy}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_2^3 \int_{y/3}^{1} f(x,y)\, dx\, dy}_{\mathrm{II}}$$ (1pto)