Funções de Várias Variáveis – BCN 0407
2º quad. 2023 – Noturno – São Bernardo do Campo
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Segunda Prova – 16/08/2023

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Determine $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, apresentando apenas a resposta final, tal que ∇f seja como dado. Outra função está resolvida como exemplo. (2pts)

Exemplo: $\nabla f(x,y,z) = (\,2x,\ -3^y z \ln 3\,,\ -3^y\,)$.

$$\boxed{x^2 - 3^y z + C}$$

Resolva: $\nabla f(x,y,z) = (\,4x^3y^3,\ 3x^4y^2 - 5ze^{yz},\ 6z - 5ye^{yz}\,)$.

$$\boxed{\underbrace{x^4y^3}_{1\,\text{pto}} \underbrace{- 5e^{yz} + 3z^2}_{1\,\text{pto}} + C}$$

$$f = \int \frac{\partial f}{\partial x}\,dx = \int 4x^3y^3\,dx = x^4y^3 + A(y,z) \xrightarrow{\partial/\partial y} \cancel{3x^4y^2} + \frac{\partial A}{\partial y} = \cancel{3x^4y^2} - 5ze^{yz} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \int (-5ze^{yz})\,dy = -5e^{yz} + B(z) \xrightarrow{\partial/\partial z} -\cancel{5e^{yz}\,y} + B'(z) = 6z - \cancel{5ye^{yz}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \int 6z\,dz = 3z^2 + C.$$

(2) Determine e classifique os pontos críticos de $f(x,y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$. (3pts)

(Lista 5, ex. 13)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8xe^y - 8x^3 = 8x(e^y - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } e^y = x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2e^y - 4e^{4y} = 4e^y(x^2 - e^{3y}) = 0 \Leftrightarrow e^{3y} = x^2 \quad (\text{porque sempre } e^y \neq 0)$$

(1pto)

A alternativa $x=0$ na primeira linha nunca acontece, porque resulta em $e^{3y}=0$ na única alternativa da segunda linha, o que é impossível. Então: $e^y = x^2 = e^{3y} \Rightarrow e^{2y} = 1 \Rightarrow y = 0$ e $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$ pontos críticos são $(1,0)$ e $(-1,0)$. (1pto)

$$H_f = \begin{vmatrix} \partial^2 f/\partial x^2 & \partial^2 f/\partial y\partial x \\ \partial^2 f/\partial x\partial y & \partial^2 f/\partial y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8e^y - 24x^2 & 8xe^y \\ 8xe^y & 4x^2e^y - 16e^{4y} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_f(\pm 1, 0) = \begin{vmatrix} -16^{<0} & \pm 8 \\ \pm 8 & -12 \end{vmatrix} = 128 > 0 \Rightarrow \text{ambos são pontos de máximo.}$$

(1pto)

(3) Determine os pontos críticos de $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$. (Não os classifique.) (2pts)

(Lista 5, ex. 1d)

$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{-x^2-y^2} + xye^{-x^2-y^2}(-2x) = y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2} = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{-x^2-y^2} + xye^{-x^2-y^2}(-2y) = x(1-2y^2)e^{-x^2-y^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $y = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

(1pto)

Combinações das alternativas das duas linhas: (1pto)

$y=0$ e $x=0 \Rightarrow (0,0)$

$y=0$ e $y=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ impossível

$y=0$ e $y=\frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ impossível

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $x=0 \Rightarrow$ impossível

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $y=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $x=0 \Rightarrow$ impossível

$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $y=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

(4) Determine os valores extremos de $f(x,y) = xy$ sujeita a $4x^2 + 9y^2 = 36$ e estime os valores extremos da mesma f para o vínculo $4x^2 + 9y^2 = 38$. (3pts)

(Compare com Lista 5, ex. 6,b.)

Com $f = xy$ e $g = 4x^2+9y^2$: $\nabla f = (y,x)$ e $\nabla g = (8x, 18y) \neq 0$ (só se anula em $(0,0)$ que não satisfaz $g=36$). Sistema:

$$\begin{cases} y = \lambda \cdot 8x & (\mathrm{I}) \\ x = \lambda\, 18y & (\mathrm{II}) \\ 4x^2+9y^2 = 36 & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

(1pto)

Substitua y de (I) em (II): $x = \lambda . 18 . \lambda . 8x = \lambda^2 . 144x \Rightarrow x = 0$ ou $\lambda = \frac{\pm 1}{12}$

Mas $x = 0 \xrightarrow{(\mathrm{I})} y = 0$ e $(0,0)$ não satisfaz (III), então $x \neq 0$ e $\lambda = \frac{\pm 1}{12}$. Com (I) em (III): $4x^2 + 9(\lambda 8x)^2 = 36 \Rightarrow 4x^2 + 9 \cdot \frac{1}{144} \cdot 64x^2 = 36 \Rightarrow 8x^2 = 36 \Rightarrow x = \frac{\pm 3}{\sqrt{2}}$

Em (I), cada sinal de x e de λ resulta em um sinal para $y = \pm\sqrt{2}$. Então $f = xy$ tem valor máximo $\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 3$ e mínimo $\frac{-3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = -3$. (1pto)

(Note que $f = 3$ para x,y do mesmo sinal $\Rightarrow \lambda > 0$; $f = -3$ para x,y de sinais opostos $\Rightarrow \lambda < 0$.)

Para o novo vínculo $g = 38$, temos $\Delta C = 38 - 36 = 2$, então $\Delta V = \lambda \Delta C = \pm\frac{1}{12} \cdot 2 = \frac{\pm 1}{6}$: máximo $\approx 3 + \frac{1}{6}$ e mínimo $\approx -3 - \frac{1}{6}$. (1pto) (Novamente, note $f = \pm 3 \Leftrightarrow \lambda \gtrless 0$)