

Introdução às EDO – BCN 0405  
3º quad. 2023 – Diurno – Santo André  
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Primeira Prova – Versão X – 23/10/2023

Nome

RA

Resolução e pontuação	_____
-----------------------	-------

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou “branquinho”. Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva cada item, apresentando apenas as respostas finais. O primeiro item está resolvido como exemplo. (4pts)

Ex.: Resolva a equação  $y' = -5y$ .

$$y = Ce^{-5x}$$

(a) Identifique o PVI equivalente à equação  $y(x) = -6 + \int_2^x 4s(y(s) + \cos s) ds$ .

$$y' = 4x(y + \cos x), \quad y(2) = -6$$

(1pt)

(b) Resolva a equação  $(4\pi x - 3x^2y^{-2}) dx + (2x^3y^{-3} + 5) dy = 0$  (deixe a solução implícita).

$$2\pi x^2 - x^3 y^{-2} + 5y = C$$

(1pt)

(c) Resolva a equação  $y' + 2xy = 2x \exp(-x^2)$ .

$$y = (x^2 + D) \exp(-x^2)$$

(1pt)

(d) Resolva o PVI  $(y^3 - e^y)y' = \sin x - 2x, y(0) = 2$  (deixe a solução implícita).

$$\frac{y^4}{4} - e^y = -\cos x - x^2 + 5 - e^2$$

(1pt)

(a) Em geral,  $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \Leftrightarrow y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ .

(b) Exata:  $f = \int (4\pi x - 3x^2y^{-2}) dx = 2\pi x^2 - x^3y^{-2} + A(y) \Rightarrow 0 + 2x^3y^{-3} + A'(y) = 2x^3y^{-3} + 5 \Rightarrow A(y) = \int 5 dy = 5y + C_1 \Rightarrow f = 2\pi x^2 - x^3y^{-2} + 5y + C_1 = K$ .

(c) Linear:  $y' + 2xy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = -2x dx \Rightarrow \ln|y| = -x^2 + C_1 \Rightarrow y = Ce^{-x^2} \rightarrow C'e^{-x^2} + C'e^{-x^2}(-2x) + 2x \cdot Ce^{-x^2} = 2xe^{-x^2} \Rightarrow C' = 2x \Rightarrow C = x^2 + D \Rightarrow y = (x^2 + D)e^{-x^2}$ .

(d) Variáveis separáveis:  $(y^3 - e^y) dy = (\sin x - 2x) dx \xrightarrow{\int} \frac{y^4}{4} - e^y = -\cos x - x^2 + C \xrightarrow{\frac{x=0}{y=2}} 4 - e^2 = -1 - 0 + C \Rightarrow C = 5 - e^2 \rightarrow \frac{y^4}{4} - e^y = -\cos x - x^2 + 5 - e^2$ .

(2) Suponha que a velocidade de leitura de um livro seja proporcional à quantidade restante de páginas a ler. Determine a quantidade lida em função do tempo, partindo do início do livro no instante zero. (2pts)

Sejam:  $Q(t)$ : quantidade lida em função do tempo;  $M$ : quantidade de total. Então:  $Q' = k(M - Q)$ ,  $Q(0) = 0$ . (1pt)

$$\frac{dQ}{dt} = k(M - Q) \Rightarrow \frac{dQ}{M - Q} = k dt \xrightarrow{\int} -\ln |M - Q| = kt + C \Rightarrow$$

$$\rightarrow M - Q = C e^{-kt} \Rightarrow Q = M - C e^{-kt}$$

$$Q(0) = 0 \Rightarrow 0 = M - C e^0 \Rightarrow C = M \Rightarrow Q = M - M e^{-kt} \quad (1pt)$$

(Também na versão Y.)

(3) Determine e classifique os equilíbrios de  $y' = 3y(y + 1)^2$ , sem a resolver. (2pts)

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3y(y+1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y = -1 \quad (1pt)$$

	$3y$	$(y+1)^2$	$y'$	$y$	
0	+	+	+		→ instável
-1	-	+	-		→ semiestável
	-	+	-		

(1pt)

(4) Suponha  $f, g, p, q$  funções de uma variável  $x$  e que  $f$  é solução de  $y' = py$ . Mostre que, ao substituir  $fg$  em  $y' = py + q$ , podemos eliminar  $g$  e isolar  $g'$ . (2pts)

$$f \text{ é solução de } y' = py \Rightarrow f' = pf \quad (*)$$

$$(fg)' = p(fg) + q \Rightarrow f'g + fg' = pfg + q \xrightarrow{(*)} [pf]g + fg' = pfg + q$$

$$\rightarrow fg' = q \Rightarrow g' = \frac{q}{f} \quad (1pt)$$

(Também na versão Y.)