Introdução às EDO – BCN 0405
3° quad. 2023 – Diurno – Santo André
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Primeira Prova – Versão Y – 23/10/2023

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	——

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva cada item, apresentando apenas as respostas finais. O primeiro item está resolvido como exemplo. (4pts)

Ex.: Resolva a equação $y' = -5y$.

$$\boxed{y = Ce^{-5x}}$$

(a) Identifique a equação integral equivalente ao PVI $y' = 3x(e^x - y)$, $y(-1) = 5$.

$$\boxed{y(x) = 5 + \int_{-1}^{x} 3s\left(e^s - y(s)\right) ds}$$ (1pto)

(b) Resolva a equação $(-x^{-2}y^3 - 6)\, dx + (4\pi y + 3x^{-1}y^2)\, dy = 0$ (deixe a solução implícita).

$$\boxed{x^{-1}y^3 - 6x + 2\pi y^2 = C}$$ (1pto)

(c) Resolva a equação $xy' - y = x^2 \exp(-x)$.

$$\boxed{y = (D - e^{-x})x}$$ (1pto)

(d) Resolva o PVI $(\operatorname{sen} y - y^4)y' = 5x - e^x$, $y(3) = 0$ (deixe a solução implícita).

$$\boxed{-\cos y - \frac{y^5}{5} = \frac{5}{2}x^2 - e^x + e^3 - \frac{47}{2}}$$ (1pto)

(a) Em geral, $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0 \Leftrightarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$.

(b) Exata: $f = \int (-x^{-2}y^3 - 6)\, dx = x^{-1}y^3 - 6x + A(y) \Rightarrow 3x^{-1}y^2 - 0 + A'(y) =$
$= 4\pi y + 3x^{-1}y^2 \Rightarrow A(y) = \int 4\pi y\, dy = 2\pi y^2 + C_1 \Rightarrow f = x^{-1}y^3 - 6x + 2\pi y^2 + C_1 = K$.

(c) Linear: $xy' - y = 0 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \xrightarrow{\int} \ln|y| = \ln|x| + C_1 \Rightarrow y = Cx$
$\Rightarrow x(C'x + C\cdot 1) - Cx = x^2 e^{-x} \Rightarrow C'x^2 = x^2 e^{-x} \Rightarrow C' = e^{-x} \Rightarrow C = -e^{-x} + D \Rightarrow$
$\Rightarrow y = (D - e^{-x})x$.

(d) Variáveis separáveis: $(\operatorname{sen} y - y^4)\, dy = (5x - e^x)\, dx \xrightarrow{\int} -\cos y - \frac{y^5}{5} = 5\frac{x^2}{2} -$
$- e^x + C \xrightarrow[y=0]{x=3} -1 - 0 = \frac{45}{2} - e^3 + C \Rightarrow C = e^3 - \frac{47}{2} \Rightarrow -\cos y - \frac{y^5}{5} = \frac{5}{2}x^2 -$
$- e^x + e^3 - 47/2$.

(2) Suponha f, g, u, v funções de uma variável x e que u é solução de $y' = fy$. Mostre que, ao substituir uv em $y' = fy + g$, podemos eliminar v e isolar v'. (2pts)

u é solução de $y' = fy \Rightarrow u' = fu$ (*)

$(uv)' = f(uv) + g \Rightarrow u'v + uv' = fuv + g \xrightarrow[(1pto)]{(*)} [fu]v + u.v' =$

$= fuv + g \Rightarrow uv' = g \Rightarrow v' = \frac{g}{u}$ (1pto)

(Também na versão X.)

(3) Suponha que a velocidade de leitura de um livro seja proporcional à quantidade restante de páginas a ler. Determine a quantidade lida em função do tempo, partindo do início do livro no instante zero. (2pts)

Sejam: $Q(t)$: quantidade lida em função do tempo; M: quantidade total. Então: $Q' = k(M-Q)$, $Q(0) = 0$. (1pto)

$\frac{dQ}{dt} = k(M-Q) \Rightarrow \frac{dQ}{M-Q} = k\,dt \xrightarrow{\int} -\ln|M-Q| = kt + C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow M - Q = Ce^{-kt} \Rightarrow Q = M - Ce^{-kt}.$

$Q(0) = 0 \Rightarrow 0 = M - Ce^{0} \Rightarrow C = M \Rightarrow Q = M - Me^{-kt}.$ (1pto)

(Também na versão X.)

(4) Determine e classifique os equilíbrios de $y' = 3y^2(1-y)$, sem a resolver. (2pts)

$y' = 0 \Leftrightarrow 3y^2(1-y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $y = 1$ (1pto)

	$3y^2$	$1-y$	y'	y	
	+	−	−	↘	
1					⇒ estável
	+	+	+	↗	
0					⇒ semiestável
	+	+	+	↗	

(1pto)