/

Introdução às EDO – BCN 0405
3° quad. 2023 – Diurno – Santo André
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Segunda Prova – Versão X – 06 dez. 2023

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva cada item, apresentando apenas as respostas finais. O primeiro item está resolvido como exemplo. (4pts)

Ex.: Resolva a equação $y'' - 5y' + 6y = 0$.

$$\boxed{y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}}$$

(a) Identifique a equação de um sistema massa–mola horizontal e não forçado, com massa 5 kg, constante de amortecimento 2 Ns/m e constante elástica 7 N/m.

$$\boxed{5x'' + 2x' + 7x = 0}$$ (1 pto)

(b) Identifique a forma de y_p para resolver $y'' - 2my' + (m^2 - 1)y = Ke^{(m+1)x}$ com o método dos coeficientes indeterminados (não calcule esse(s) coeficiente(s)).

$$\boxed{y_p = Axe^{(m+1)x}}$$ (1 pto)

(c) Resolva a equação $y'' - 4y' + 5y = 0$.

$$\boxed{y = C_1e^{2x}\cos x + C_2e^{2x}\operatorname{sen} x}$$ (1 pto)

(d) Resolva a equação de Euler $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$.

$$\boxed{y = C_1x^{-2} + C_2x^{-2}\ln x}$$ (1 pto)

(a) Em geral: $mx'' + bx' + kx = 0$. (b) Parte homogênea: $P(t) = t^2 - 2mt + (m^2-1) = 0 \Rightarrow t = m \pm 1$ raízes simples $\Rightarrow y_1 = e^{(m+1)x}$ e $y_2 = e^{(m-1)x}$. Então o resto é solução da parte homogênea $\Rightarrow M = 1 \Rightarrow y_p = Ax^M e^{(m+1)x}$.

(c) $P(t) = t^2 - 4t + 5 = 0 \Rightarrow t = 2 \pm i \Rightarrow y_1 = e^{2x}\cos x$ e $y_2 = e^{2x}\operatorname{sen} x$.

(d) $P(t) = t^2 + (5-1)t + 4 = 0 \Rightarrow t = -2$ dupla $\Rightarrow y_1 = x^{-2}$ e $y_2 = x^{-2}\ln x$.

(2) Resolva a equação $y'' - 2y' + y = e^{2x}$ por variação das constantes. (2pts)

Parte homogênea: $P(t) = t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = +1$ duplo $\Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{+x} \\ y_2 = x e^{+x} \end{cases}$

Então $W = \begin{vmatrix} e^{+x} & x e^{+x} \\ +e^{+x} & e^{+x} + x e^{+x} \end{vmatrix} = e^{+2x} + x e^{+2x} - x e^{+2x} = e^{+2x}$.

$C_1 = -\int \frac{y_2 \cdot R}{aW}\, dx = -\int \frac{x e^{+x} \cdot e^{2x}}{1 \cdot e^{+2x}}\, dx = -\int x e^{+x}\, dx = -x e^x + e^x$

$C_2 = \int \frac{y_1 R}{aW}\, dx = \int \frac{e^x \cdot e^{2x}}{1 \cdot e^{2x}}\, dx = \int e^x\, dx = e^x$

(1pto: método
1pto: cálculos)

Logo, $y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2 = (-x e^x + e^x) e^x + e^x \cdot x e^x = e^{2x}$.

(3) Determine e classifique os equilíbrios de $\begin{cases} x' = 6xy - 2y \\ y' = 2x + 4xy \end{cases}$ sem o resolver. (2pts)

$F = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6xy - 2y = 0 \\ 2x + 4xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y(3x-1) = 0 \\ 2x(1+2y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } x = 1/3 \\ x = 0 \text{ ou } y = -1/2 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$ e $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

(1pto)

$F' = \begin{bmatrix} 6y & 6x-2 \\ 2+4y & 4x \end{bmatrix}$ matriz jacobiana. Então:

* em $(0,0)$: matriz $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -u & -2 \\ 2 & -u \end{vmatrix} = u^2 + 4 = 0 \Rightarrow u = \pm 2i \Rightarrow$ elíptico
(mas pode ser espiral)

* em $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$: matriz $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -3-u & 0 \\ 0 & 4/3-u \end{vmatrix} = (-3-u)(4/3-u) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow u = -3 < 0$ ou $u = 4/3 > 0 \Rightarrow$ sela

(1pto)

(4) Suponha f, g, p, q funções de uma variável, sendo f solução de $y'' = qy' + py$. Argumente como, ao substituir fg nessa equação, podemos encontrar g. (2pts)

Por hipótese, $f'' = qf' + pf$ (*). Com $y = fg$, temos $y' = f'g + fg'$ e $y'' = f''g + 2f'g' + fg'' \overset{(*)}{=} (qf' + pf)g + 2f'g' + fg''$. Na equação, vem:

$\cancel{qf'g} + \cancel{pfg} + 2f'g' + fg'' = q(\cancel{f'g} + fg') + \cancel{pfg} \Rightarrow 2f'g' + fg'' = qfg'$.

Note que g foi eliminado e constam apenas g', g'': com $g' = z$, temos $g'' = z'$ e a equação $(2f' - qf)z + fz' = 0$; resolvemos obtendo z e então $g = \int z\, dx$.

(Compare com redução de ordem e "variável ausente"!)

(1pto: cálculos e eliminação de g; 1pto: $g' = z$.)