Introdução às EDO – BCN 0405
3º quad. 2023 – Diurno – Santo André
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Segunda Prova – Versão Y – 06 dez. 2023

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva cada item, apresentando apenas as respostas finais. O primeiro item está resolvido como exemplo. (4pts)

Ex.: Resolva a equação $y'' - 5y' + 6y = 0$.

$$\boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}}$$

(a) Identifique a equação de um sistema massa–mola horizontal e não forçado, com massa 7 kg, constante de amortecimento 5 Ns/m e constante elástica 2 N/m.

$$\boxed{7x'' + 5x' + 2x = 0}$$ (1 pto)

(b) Identifique a forma de y_p para resolver $y'' - 2ky' + k^2 y = Le^{kx}$ com o método dos coeficientes indeterminados (não calcule esse(s) coeficiente(s)).

$$\boxed{y_p = Ax^2 e^{kx}}$$ (1 pto)

(c) Resolva a equação $9y'' + 6y' + y = 0$.

$$\boxed{y = C_1 e^{-x/3} + C_2 x e^{-x/3}}$$ (1 pto)

(d) Resolva a equação de Euler $x^2 y'' - 4xy' - 6y = 0$.

$$\boxed{y = C_1 x^{-1} + C_2 x^6}$$ (1 pto)

(a) Em geral: $mx'' + bx' + kx = 0$. (b) Parte homogênea: $P(t) = t^2 - 2kt + k^2 = 0 \Rightarrow t = k$ raiz dupla $\Rightarrow y_1 = e^{kx}$ e $y_2 = xe^{kx}$. Então o resto é solução da parte homogênea $\Rightarrow M = 2 \Rightarrow y_p = Ax^M e^{kx}$. (c) $P(t) = 9t^2 + 6t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1/3$ dupla $\Rightarrow y_1 = e^{-x/3}$ e $y_2 = xe^{-x/3}$. (d) $P(t) = t^2 + (-4-1)t - 6 = 0 \Rightarrow t = -1, 6 \Rightarrow y_1 = x^{-1}$ e $y_2 = x^6$.

(2) Resolva a equação $y'' - y' - 2y = 2e^{-x}$ por variação das constantes. (2pts)

Parte homogênea: $P(t) = t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t = -1; 2 \Rightarrow y_1 = e^{-x}$ e $y_2 = e^{2x}$.

Então $W = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{x} + e^{x} = 3e^{x}$.

(1 pto: método
1 pto: cálculos)

$C_1 = -\int \frac{y_2 R}{aW}\,dx = -\int \frac{e^{2x} \cdot 2e^{-x}}{1 \cdot 3e^{x}}\,dx = -\int \frac{2}{3}\,dx = -\frac{2x}{3}$.

$C_2 = \int \frac{y_1 R}{aW}\,dx = \int \frac{e^{-x} \cdot 2e^{-x}}{1 \cdot 3e^{x}}\,dx = \int \frac{2}{3} e^{-3x}\,dx = -\frac{2}{9} e^{-3x}$.

este termo pode ser absorvido em $D_1 e^{-x}$

Logo, $y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2 = -\frac{2x}{3} e^{-x} - \frac{2}{9} e^{-3x} \cdot e^{2x} = -\frac{2}{3} x e^{-x} - \frac{2}{9} e^{-x}$.

(3) Determine e classifique os equilíbrios de $\begin{cases} x' = 8xy + 2y \\ y' = 6x - 3xy \end{cases}$ sem o resolver. (2pts)

$F = 0 \Rightarrow \begin{cases} 8xy + 2y = 0 \\ 6x - 3xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y(4x+1) = 0 \\ 3x(2-y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } x = -1/4 \\ x = 0 \text{ ou } y = 2 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$ e $\left(-\frac{1}{4}, 2\right)$ (1 pto)

$F' = \begin{bmatrix} 8y & 8x+2 \\ 6-3y & -3x \end{bmatrix}$ matriz jacobiana. Então:

* em $(0,0)$: matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -u & 2 \\ 6 & -u \end{vmatrix} = u^2 - 12 = 0 \Rightarrow u = \pm\sqrt{12} \gtrless 0 \Rightarrow$ sela

* em $\left(-\frac{1}{4}, 2\right)$: matriz $\begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 16-u & 0 \\ 0 & 3/4-u \end{vmatrix} = (16-u)(3/4-u) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow u = 16 > 0$ ou $u = 3/4 > 0 \Rightarrow$ nó repulsor (1 pto)

(4) Suponha f, g, u, v funções de uma variável, sendo v solução de $y'' = fy' + gy$. Argumente como, ao substituir uv nessa equação, podemos encontrar u. (2pts)

Por hipótese, $v'' = fv' + gv$ (*). Com $y = uv$, temos $y' = u'v + uv'$ e $y'' =$
$= u''v + 2u'v' + uv'' \overset{(*)}{=} u''v + 2u'v' + u(fv' + gv)$. Na equação, vem:
$u''v + 2u'v' + \cancel{ufv'} + \cancel{ugv} = f(u'v + \cancel{uv'}) + \cancel{guv} \Rightarrow u''v + 2u'v' = fu'v$.
Note que u foi eliminado e constam apenas u', u'': com $u' = z$, temos $u'' = z'$ e a equação $z'v + (2v' - fv)z = 0$; resolvemos obtendo z e então $u = \int z\,dx$. (Compare com redução de ordem e "variável ausente".)

(1 pto: cálculos e eliminação de u; 1 pto: $u' = z$.)