Funções de Várias Variáveis – BCN 0407
1° quad. 2024 – Diurno – São Bernardo do Campo
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Primeira Prova – Versão X – 18 mar. 2024

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	————

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou “branquinho”. Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva cada item, apresentando apenas as respostas finais. O primeiro item está resolvido como exemplo. (4pts)

Ex.: Determine a derivada parcial de $x^2y - 3x^y$ com respeito a x.

$$\boxed{2xy - 3yx^{y-1}}$$

(a) Identifique a melhor aproximação linear de uma função vetorial S com variável vetorial U em um ponto E.

$$\boxed{S(E) + S'(E)\cdot(U - E)}$$ (1pto)

(b) Calcule $\nabla f(x,y,z)$ para $f(x,y,z) = x^2y - \pi xz + e^{yz}$.

$$\boxed{(2xy - \pi z,\ x^2 + e^{yz}\cdot z,\ -\pi x + e^{yz}\cdot y)}$$ (1pto)

(c) Identifique a mudança de coordenadas e o domínio das novas variáveis, semelhantes a coordenadas polares, que descreve a região $\{\ (x,y) \mid 4x^2 + (y-1)^2 \leq 4\ \}$.

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = 1 + 2r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad \text{para} \quad \begin{cases} 0 \leq \theta < 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}}$$ (1pto)

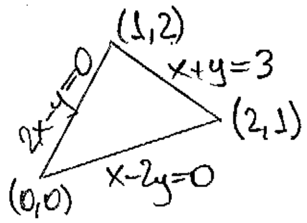
(Cf. lista 6, ex. 7)

(d) Escreva a Regra da Cadeia para a função $T(p(s), q(s))$ sendo s variável escalar.

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial p}\cdot\frac{dp}{ds} + \frac{\partial T}{\partial q}\cdot\frac{dq}{ds}}$$ (1pto)

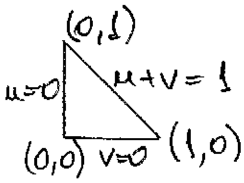
Escreva usando $d(u,v)$ (avisado em sala)

(2) ~~Calcule~~ $\int_D (x-3y)\, d(x,y)$, sendo D a região triangular de vértices (0,0), (2,1) e (1,2), por meio da mudança de coordenadas $x = 2u + v$, $y = u + 2v$. (2pts)



e $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$ e $\begin{cases} u = \frac{2x}{3} - \frac{y}{3} \\ v = -\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} \end{cases}$

$\rightarrow$



$\rightarrow \int_D (x-3y)\, d(x,y) = \underbrace{\int_0^1 \int_0^{1-u}}_{\text{1 pto}} (2u+v-3u-6v) \cdot 3\,dv\,du$

1 pto

(Lista 7, ex. 10 a)

(3) Seja $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{2/3}$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. (2pts)

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(h^2)^{2/3} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h^{1/3} = 0$

(1 pto: definição por limite, 1 pto: cálculos e resultado)

(Note que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{3}(x^2+y^2)^{-1/3} \cdot 2x$ não está definida em (0,0).)

(Lista 3, ex. 4)

(4) Sejam: C o círculo de centro (1,1) e raio 5; P o ponto (5,4). Determine a reta tangente a C passando por P de dois modos: (a) parametrize C e use o vetor derivada; (b) expresse C como curva de nível e encontre o "hiperplano tangente". (2pts)

(a) $\gamma(t) = (1+5\cos t, 1+5\,\text{sen}\, t) \Rightarrow \gamma'(t) = (-5\,\text{sen}\, t, 5\cos t)$. Com $\gamma(t_0) =$
$= P$, temos: $(1+5\cos t_0, 1+5\,\text{sen}\, t_0) = (5,4) \Rightarrow \cos t_0 = \frac{4}{5}$ e $\text{sen}\, t_0 = \frac{3}{5} \Rightarrow$
$\Rightarrow (x,y) = \gamma(t_0) + \lambda \cdot \gamma'(t_0) = (5,4) + \lambda \cdot (-3,4) \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - 3\lambda \\ y = 4 + 4\lambda \end{cases}$ (1 pto)

(b) $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25 \Rightarrow \nabla f(x,y) = (2x-2, 2y-2) \Rightarrow \nabla f(5,4) =$
$= (8,6)$. Então: $\langle \nabla f(5,4) \mid (x,y) - (5,4) \rangle = 0 \Rightarrow 8x + 6y = 64$ (1 pto)

(Note que os resultados em (a) e (b) coincidem.)