Funções de Várias Variáveis – BCN 0407
1° quad. 2024 – Diurno – São Bernardo do Campo
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Primeira Prova – Versão Y – 18 mar. 2024

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva cada item, apresentando apenas as respostas finais. O primeiro item está resolvido como exemplo. (4pts)

Ex.: Determine a derivada parcial de $x^2y - 3x^y$ com respeito a y.

$$\boxed{x^2 - 3x^y \ln x}$$

(a) Identifique a melhor aproximação linear de uma função vetorial Q com variável vetorial Z em um ponto M.

$$\boxed{Q(M) + Q'(M)\cdot(Z-M)}$$ (1pto)

(b) Calcule $\nabla f(x,y,z)$ para $f(x,y,z) = e^{xy} + \pi xz - yz^2$.

$$\boxed{(e^{xy}y + \pi z,\ e^{xy}x - z^2,\ \pi x - 2yz)}$$ (1pto)

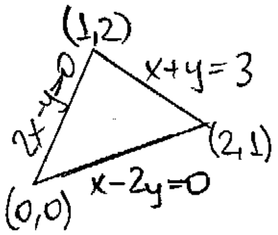
(c) Identifique a mudança de coordenadas e o domínio das novas variáveis, semelhantes a coordenadas polares, que descreve a região $\{ (x,y) \mid (x-1)^2 + 9y^2 \leq 9 \}$.

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + 3r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \text{para} \quad \begin{cases} 0 \leq \theta < 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}}$$ (1pto)
(cf. Lista 6, ex.7)

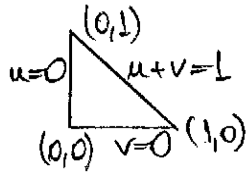
(d) Escreva a Regra da Cadeia para a função $P(u(s), h(s))$ sendo s variável escalar.

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial u}\cdot\frac{du}{ds} + \frac{\partial P}{\partial h}\cdot\frac{dh}{ds}}$$ (1pto)

(2) ~~Calcule~~ Escreva $\int_D (x-3y)\, d(x,y)$ usando $d(u,v)$ sendo D a região triangular de vértices (0,0), (2,1) e (1,2), por meio da mudança de coordenadas $x = 2u + v$, $y = u + 2v$. (2pts) (cansado em sala)



$$e \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad e \quad \begin{cases} u = \frac{2x}{3} - \frac{y}{3} \\ v = -\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 

$$\Rightarrow \int_D (x-3y)\, d(x,y) = \underbrace{\int_0^1 \int_0^{1-u}}_{1\text{pto}} (2u+v-3u-6v)\, \underbrace{3}_{1\text{pto}}\, dv\, du$$

(Lista 7, ex. 10a)

(3) Seja $f(x,y) = (x^2+y^2)^{2/3}$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. (2pts)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h^2)^{2/3}-0}{h} = \lim_{h\to 0} h^{1/3} = 0.$$

(1pto: definição por limite; 1pto: cálculos e resultado.)

(Note que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{3}(x^2+y^2)^{-1/3} \cdot 2x$ não está definida em (0,0).)

(Lista 3, ex. 4.)

(4) Sejam: C o círculo de centro (6,1) e raio 5; P o ponto (2,4). Determine a reta tangente a C passando por P de dois modos: (a) parametrize C e use o vetor derivada; (b) expresse C como curva de nível e encontre o "hiperplano tangente". (2pts)

(a) $\gamma(t) = (6+5\cos t, 1+5\,\text{sen}\, t) \Rightarrow \gamma'(t) = (-5\,\text{sen}\, t, 5\cos t)$. Com $\gamma(t_0) = P$, temos: $(6+5\cos t_0, 1+5\,\text{sen}\, t_0) = (2,4) \Rightarrow \cos t_0 = -\frac{4}{5}$ e $\text{sen}\, t_0 = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow (x,y) = \gamma(t_0) + \lambda\gamma'(t_0) = (2,4) + \lambda(-3,-4) \Rightarrow \begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = 4-4\lambda \end{cases}$ (1pto)

(b) $f(x,y) = (x-6)^2 + (y-1)^2 = 25 \Rightarrow \nabla f(x,y) = (2x-12, 2y-2) \Rightarrow \nabla f(2,4) = (-8,6)$. Então: $\langle \nabla f(2,4) \,|\, (x,y)-(2,4) \rangle = 0 \Rightarrow -8x+6y = 8$ (1pto)

(Note que os resultados em (a) e (b) coincidem.)