/

Funções de Várias Variáveis – BCN 0407
1º quad. 2024 – Diurno – São Bernardo do Campo
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Segunda Prova – Versão X – 30 abr. 2024

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **5** (cinco) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Em cada item, apresente apenas a classificação do ponto crítico com a matriz hessiana indicada. O primeiro item está resolvido como exemplo. (3pts)

Exemplo: $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ | ponto de mínimo

(a) $\begin{bmatrix} -\pi & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ | ponto de máximo | (1pto)

(b) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ | ponto de multissela | (1pto)

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ | ponto de multissela | (1pto)

a) Matriz diagonalizada com entradas negativas.

b) Subdeterminantes: $-2<0$, $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -8-1=-9<0$,

$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -24+0+0-0+8-3 = -19<0 \Rightarrow$ quocientes $-++$.

c) Subdeterminantes: $3>0$, $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 3-49=-46<0$,

$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6+0+0-0-0-98=-92<0 \Rightarrow$ quocientes $+-+$.

(2) Um experimento de laboratório requer o ajuste de uma reta a um conjunto de pontos (x_i, y_i). Identifique a forma da função a determinar (não é a função objetivo a minimizar) e quais são as incógnitas desse problema de otimização. (1pto)

Função $y=ax+b$, incógnitas a, b. (1pto)

(3) Para $f(x,y) = (x^2 - 6x - 7)(y^2 + \pi y)$, determine seus pontos críticos (não os classifique). (2pts)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = (2x-6)(y^2+\pi y) = 0 \Leftrightarrow x=3 \text{ ou } y=0 \text{ ou } y=-\pi \\ \frac{\partial f}{\partial y} = (x^2-6x-7)(2y+\pi) = 0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ou } x=7 \text{ ou } y=-\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\underline{1}\text{pto})$$

Combinações possíveis: $(3,-\frac{\pi}{2}), (-1,0), (7,0), (-1,-\pi), (7,-\pi)$.

($\underline{1}$pto)

(4) Encontre os pontos mais distante e mais próximo de $(1,3)$ no círculo $x^2 + y^2 = 8$. (2pts)

Otimizar $f(x,y) = (x-1)^2+(y-3)^2$ (quadrado da distância) sujeita a $g(x,y) = x^2+y^2 = 8 \Rightarrow \nabla f = (2x-2, 2y-6)$ e $\nabla g = (2x, 2y) \Rightarrow \begin{cases} 2x-2 = \lambda.2x \\ 2y-6 = \lambda.2y \\ x^2+y^2 = 8 \end{cases}$ ($\underline{1}$pto)

Note que $2x-2$ não pode ser $2x$ $(-2\neq 0) \Rightarrow \lambda \neq 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1-\lambda}$ e $y = \frac{3}{1-\lambda} \Rightarrow \frac{1}{(1-\lambda)^2} + \frac{9}{(1-\lambda)^2} = 8 \Rightarrow (1-\lambda)^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow \lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \mp\frac{2}{\sqrt{5}}$ e $y = \mp\frac{6}{\sqrt{5}} \Rightarrow$ pontos $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$ para $\lambda = 1-\frac{\sqrt{5}}{2}$ e $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-6}{\sqrt{5}}\right)$ para $\lambda = 1+\frac{\sqrt{5}}{2}$.

($\underline{1}$pto)

Note que $\nabla g = 0 \Leftrightarrow x=y=0$ que não satisfaz $g=8$.

(5) Para $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 nas variáveis (x,y) e escrevendo $\nabla f = (u,v)$, mostre que $\partial v/\partial x - \partial u/\partial y \equiv 0$. (2pts)

$u = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $v = \frac{\partial f}{\partial y}$ ($\underline{1}$pto) $\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$ por Schwarz. ($\underline{1}$pto)