Funções de Várias Variáveis – BCN 0407
1° quad. 2024 – Diurno – São Bernardo do Campo
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Segunda Prova – Versão Y – 30 abr. 2024

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **5** (cinco) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Em cada item, apresente apenas a classificação do ponto crítico com a matriz hessiana indicada. O primeiro item está resolvido como exemplo. (3pts)

Exemplo: $\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{ponto de máximo}}$

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{ponto de mínimo}}$ (1pto)

(b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{ponto de máximo}}$ (1pto)

(c) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{ponto de multissela}}$ (1pto)

a) Matriz diagonalizada com entradas positivas.

b) Subdeterminantes: $-1<0$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3-1=2>0$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$

$= -6+0+0-0-0+2 = -4 < 0 \Rightarrow$ quocientes - - -.

c) Subdeterminantes: $-2<0$, $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6<0$, $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$= -12+0+0-48+2-0 = -58 < 0 \Rightarrow$ quocientes $-++$.

(2) Um experimento de laboratório requer o ajuste de uma parábola a um conjunto de pontos (x_i, y_i). Identifique a forma da função a determinar (não é a função objetivo a minimizar) e quais são as incógnitas desse problema de otimização. (1pto)

Função $y = ax^2+bx+c$, incógnitas a, b, c. (1pto)

(3) Para $f(x,y) = (x^2 + 4x - 5)(y^2 - \pi y)$, determine seus pontos críticos (não os classifique). (2pts)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = (2x+4)(y^2-\pi y) = 0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ ou } y=0 \text{ ou } y=\pi \\ \frac{\partial f}{\partial y} = (x^2+4x-5)(2y-\pi) = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-5 \text{ ou } y=\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (1\text{pto})$$

Combinações possíveis: $(-2,\frac{\pi}{2}), (1,0), (-5,0), (1,\pi), (-5,\pi)$. (1pto)

(4) Encontre os pontos mais distante e mais próximo de (3,1) no círculo $x^2 + y^2 = 6$. (2pts)

Otimizar $f(x,y) = (x-3)^2 + (y-1)^2$ (quadrado da distância) sujeito a $g(x,y) = x^2+y^2 = 6 \Rightarrow \nabla f = (2x-6,\ 2y-2)$ e $\nabla g = (2x, 2y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-6 = \lambda 2x \\ 2y-2 = \lambda 2y \\ x^2+y^2 = 6 \end{cases} \quad (1\text{pto})$$

Note que $2x-6$ não pode ser $2x$ $(-6 \neq 0) \Rightarrow \lambda \neq 1 \Rightarrow x = \frac{3}{1-\lambda}$ e $y = \frac{1}{1-\lambda} \Rightarrow \frac{9}{(1-\lambda)^2} + \frac{1}{(1-\lambda)^2} = 6 \Rightarrow (1-\lambda)^2 = \frac{5}{3} \Rightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow x = \mp \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ e $y = \mp \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \Rightarrow$ pontos $\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$ para $\lambda = 1 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ e $\left(\frac{-3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$ para $\lambda = 1 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. (1pto)

Note que $\nabla g = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ que não satisfaz $g = 6$.

(5) Para $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 nas variáveis (x,y) e escrevendo $\nabla f = (u,v)$, mostre que $\partial v/\partial x - \partial u/\partial y \equiv 0$. (2pts)

$u = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $v = \frac{\partial f}{\partial y}$ (1pto) $\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$ por Schwarz. (1pto)