Funções de Várias Variáveis – BCN 0407
2º quad. 2024 – Noturno – São Bernardo do Campo
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Primeira Prova – Versão X – 02 agosto 2024

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva cada item, apresentando apenas as respostas finais. O primeiro item está resolvido como exemplo. (4pts)

Ex.: Determine a derivada parcial de $x^2y - 3x^y$ com respeito a x.

$$\boxed{2xy - 3yx^{y-1}}$$

(a) Determine $\frac{\partial}{\partial x}(5xz^2 - 2x^8y^7 + 4yz)$.

$$\boxed{5z^2 - 16x^7y^7}$$ (1pto)

(b) Determine $\frac{\partial u}{\partial y}$ sabendo que $xye^{3u} = \pi x + 2y - 5u^2$.

$$\boxed{(2-xe^{3u})/(3xye^{3u}+10u)}$$ (1pto)

(c) Determine o plano tangente à superfície $xyz^2 + x^2y^2 = 5$ no ponto (1,1,2).

$$\boxed{6x+6y+4z = 20}$$ (1pto)

(d) Determine a reta tangente à curva $(2\,\text{sen}\,\pi t\,, 3t^5, e^{-t})$ no ponto dado por $t = 1$.

$$\boxed{(0,3,e^{-1}) + (-2\pi, 15, -e^{-1})\cdot\lambda}$$ (1pto)

(b) Derivamos ambos os membros: $xe^{3u} + xye^{3u}\cdot 3\frac{\partial u}{\partial y} = 2 - 10u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$.
Isolamos $\frac{\partial u}{\partial y}$: $(3xye^{3u}+10u)\frac{\partial u}{\partial y} = 2 - xe^{3u}$.
(c) $f = xyz^2 + x^2y^2 \Rightarrow \nabla f = (yz^2 + 2xy^2,\ xz^2 + 2x^2y,\ 2xyz) \Rightarrow \nabla f(1,1,2) =$
$= (6,6,4) \Rightarrow 6(x-1)+6(y-1)+4(z-2)=0$. (Note $f(1,1,2)=5$.)
(d) $\gamma = (2\,\text{sen}\,\pi t, 3t^5, e^{-t}) \Rightarrow \gamma(1) = (0,3,e^{-1})$ e $\gamma' = (2\pi\cos\pi t,\ 15t^4,\ -e^{-t})$
$\Rightarrow \gamma'(1) = (-2\pi, 15, -e^{-1})$.

(2) Calcule: (a) a direção e sentido em que a derivada direcional de $f = x^2 - 3xyz$ em $(2,-2,1)$ tem valor máximo; (b) esse valor. (2pts)

(a) $\nabla f = (2x-3yz, -3xz, -3xy) \Rightarrow \nabla f(2,-2,1) = (10,-6,12)$ (1pto)

(b) $u = \dfrac{\nabla f(2,-2,1)}{\|\nabla f(2,-2,1)\|} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial u}(2,-2,1) = \langle \nabla f(2,-2,1) | u \rangle =$

$= \|\nabla f(2,-2,1)\| = \|(10,-6,12)\| = \sqrt{100+36+144} = \sqrt{280}$ (1pto)

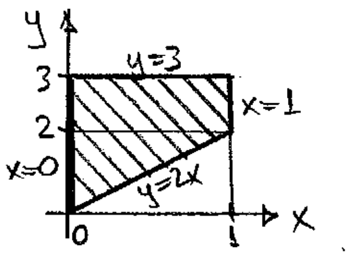
(3) Sejam $F = uv$ e $\gamma = (\cos 2\pi t, e^{5t^2})$. Calcule $(F \circ \gamma)'(0)$ usando ∇F e γ'. (2pts)

$\nabla F = (v,u)$, $\gamma(0) = (1,1)$, $\gamma' = (-2\pi \operatorname{sen} 2\pi t, e^{5t^2} \cdot 10t)$ (1pto)

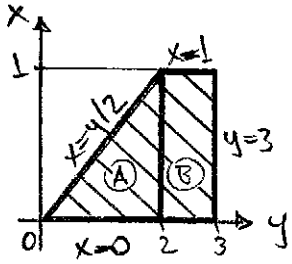
$\Rightarrow (F \circ \gamma)'(0) = \langle \nabla F(\gamma(0)) | \gamma'(0) \rangle$ (1pto)

$= \langle (1,1) | (0,0) \rangle = 0.$

(4) Inverta a ordem de integração de $\int_0^1 \int_{2x}^3 f(x,y)\, dy\, dx$. (2pts)



$\Rightarrow$



(1pto)

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^2 \int_0^{y/2} f(x,y)\, dx\, dy}_{A} + \underbrace{\int_2^3 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy}_{B}$$ (1pto)