Funções de Várias Variáveis – BCN 0407
2º quad. 2024 – Noturno – São Bernardo do Campo
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Segunda Prova – Versão Y – 04 setembro 2024

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Em cada item, apresente apenas a classificação do ponto crítico com a matriz hessiana indicada. O primeiro item está resolvido como exemplo. (4pts)

Exemplo: $\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

ponto de máximo

(a) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

ponto de mínimo

(1pto)

(b) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

ponto de máximo

(1pto)

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

multi-sela.

(1pto)

(d) $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

ponto de mínimo

(1pto)

a) Já diagonalizada, com todas as entradas positivas.

b) Subdeterminantes $D_1=-2$, $D_2=4$, $D_3=-6 \Rightarrow$ quocientes $-,-,-$.

c) Subdeterminantes $D_1=2$, $D_2=-5$, $D_3=-10 \Rightarrow$ quocientes $+,-,+$.

d) $\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 3 > 0$ com $7>0$ (ou subdets $D_1=7$, $D_2=3 \Rightarrow$ quocientes $+,+$).

(2) Calcule $\operatorname{div} F$ para $F = (5x^2y^2z^2,\ 8xy - 3yz,\ e^{2zy})$. (1pto)

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$= 10xy^2z^2 + (8x - 3z) + e^{2zy} \cdot 2y.$$

(3) Determine os pontos críticos de $f = (x^2 + x)(y - y^2)$. (Não os classifique.) (2pts)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2x+1)(y-y^2) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ou } y=0 \text{ ou } y=1.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x^2+x)(1-2y) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=-1 \text{ ou } y=\frac{1}{2}$$
} (1pto)

Combinações: (a) $x=-\frac{1}{2}$ e $x=0$ ⊗; (b) $x=-\frac{1}{2}$ e $x=-1$ ⊗; (c) $x=-\frac{1}{2}$ e $y=\frac{1}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; (d) $y=0$ e $x=0 \Rightarrow (0,0)$; (e) $y=0$ e $x=-1 \Rightarrow (-1,0)$; (f) $y=0$ e $y=\frac{1}{2}$ ⊗; (g) $y=1$ e $x=0 \Rightarrow (0,1)$; (h) $y=1$ e $x=-1 \Rightarrow (-1,1)$; (i) $y=1$ e $y=\frac{1}{2}$ ⊗

(1pto)

(4) Determine o valor máximo de $f = 4x^2 + y^2$ sujeita a $x^2 + 9y^2 = 9$ e estime o valor máximo da mesma f para o vínculo $x^2 + 9y^2 = 11$. (3pts)

Por Lagrange: $\nabla f = (8x, 2y)$ e $\nabla g = (2x, 18y)$ $(g = x^2+9y^2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8x = \lambda 2x \\ 2y = \lambda 18y \\ x^2+9y^2=9 \end{cases}$$ (1pto)

(Note $\lambda \neq 0$ porque $\lambda = 0 \Rightarrow x=y=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2+9y^2 = 0 \neq 9$.)

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ou } \lambda=4 \\ y=0 \text{ ou } \lambda=1/9 \\ x^2+9y^2=9 \end{cases} \Rightarrow \text{casos: } \begin{cases} x\neq 0 \Rightarrow \lambda=4 \Rightarrow \lambda \neq 1/9 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=\pm 3 \\ x=0 \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow \lambda = 1/9 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ pontos críticos $(3,0), (-3,0), (0,1), (0,-1)$ com valores de f respectivamente: $36, 36, 1, 1 \Rightarrow$ máximo 36 (1pto)

O valor máximo corresponde aos pontos $(\pm 3, 0)$ com $\lambda = 4$, então:

$\Delta V \approx \lambda . \Delta C = 4.(11-9) = 8 \Rightarrow$ novo $V \approx 36+8 = 44$ (1pto)