Funções de Uma Variável – BCN 0402

3º quad. 2024 – Diurno – São Bernardo do Campo

Prof. Vinicius Cifú Lopes

Primeira Prova – Versão X – 06 nov. 2024

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	—

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva cada item, apresentando apenas as respostas finais. O primeiro item está resolvido como exemplo. (3pts)

Ex.: Derive x^2.

$$2x$$

(a) Derive $x^7 e^x$.

$$7x^6 e^x + x^7 e^x$$ (1pto)

(b) Derive $\ln(\operatorname{sen} 2x)$.

$$\frac{1}{\operatorname{sen} 2x} \cdot (\cos 2x) \cdot 2$$ (1pto)

(c) Determine $\frac{dy}{dx}$ sabendo que $x^2 y + xy^2 = 3x$.

$$\frac{3 - 2xy - y^2}{x^2 + 2xy}$$ (1pto)

(a) Regra do produto. Lista 1, ex. 6i.

(b) Regra da Cadeia duas vezes. Compare com lista 2, ex. 1f.

(c) Derivação implícita: $(2xy + x^2y') + (y^2 + 2xyy') = 3 \Rightarrow (x^2 + 2xy)y' =$
$= 3 - 2xy - y^2$. Lista 2, ex. 4a.

(2) Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} x e^{1/x}$ transformando a expressão para usar l'Hôpital. (1pto)

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{e^{x^{-1}}}{x^{-1}}}_{\text{transformação}} \underset{\infty/\infty}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{e^{x^{-1}}(-x^{-2})}{-x^{-2}}}_{\text{derivações}} = \lim_{x\to 0^+} e^{x^{-1}} = \infty.$$

Lista 4, ex. 6c.

(3) Esboce o gráfico da função $f(x) = x^{1/2} - 3x$ para $x \geq 0$. Atenção se houver pontos onde as derivadas não existem. Não é preciso verificar se há assíntotas. (3pts)

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} - 3 = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3$ → não existe em 0; → zero em 1/36

$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$ → não existe em 0; → nunca se anula

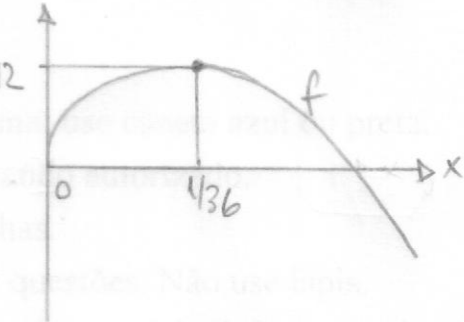
(1pto)

	0	1/36
$f'(x)$	+	−
$f(x)$	↗	↘
$f''(x)$	−	−
$f(x)$	∩	∩
$f(x)$	↗	↘

(1pto)

(1pto)

Temos: $f(0) = 0$; $f\left(\frac{1}{36}\right) = \frac{1}{12}$.



Note: $x > \frac{1}{36} \Rightarrow \sqrt{x} > \frac{1}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2}\cdot 6 = 3 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3 < 0$;

analogamente $0 < x < \frac{1}{36}$;

sempre $-1/4\sqrt{x^3} < 0$.

(4) Uma caixa retangular com uma base quadrada, sem tampa e de volume de 216 cm^3 deve ser construída. Quais devem ser as dimensões da caixa para minimizar a área superficial da caixa? Justifique que o valor é mínimo. (Obs.: $216 = 6^3$.) (3pts)

Lado da base: x com $0 < x < \infty$; altura da caixa: y

Volume: $x^2y = 216 \Rightarrow y = 216/x^2$ (1pto)

Área: $A = x^2$ (base) $+ 4xy$ (quatro retângulos laterais) $= x^2 + 4xy =$

$= x^2 + 4x\left(\frac{216}{x^2}\right) = x^2 + 4 \cdot 216 \cdot x^{-1}$ (1pto: função de uma variável)

Então $A' = 2x - 4 \cdot 216x^{-2} = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \cdot 216x^{-2} \Leftrightarrow x^3 = 2 \cdot 6^3$

$\Leftrightarrow x = 6\sqrt[3]{2}$: lado da base $6\sqrt[3]{2}$ e altura $6/\sqrt[3]{4}$ (cm) (1pto)

Temos $A'' = 2 + 8 \cdot 216x^{-3} = 6 > 0$ no ponto crítico $\Rightarrow$ A é convexa.

(1pto)

Lista 5, ex. 5.