Funções de Uma Variável – BCN 0402
3º quad. 2024 – Diurno – São Bernardo do Campo
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Primeira Prova – Versão Y – 06 nov. 2024

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva cada item, apresentando apenas as respostas finais. O primeiro item está resolvido como exemplo. (3pts)

Ex.: Derive x^2.

$$\boxed{2x}$$

(a) Derive $e^x x^{-2}$.

$$\boxed{e^x x^{-2} - 2e^x x^{-3}}$$ (1pto)

(b) Derive $e^{\text{sen}\, x^3}$.

$$\boxed{e^{\text{sen}\, x^3} \cdot (\cos x^3) \cdot 3x^2}$$ (1pto)

(c) Determine $\frac{dy}{dx}$ sabendo que $x^2y + xy^2 = 3x$.

$$\boxed{\frac{3-2xy-y^2}{x^2+2xy}}$$ (1pto)

(a) Regra do produto: Lista 1, ex. 6j.

(b) Regra da Cadeia duas vezes. Lista 2, ex. 1d.

(c) Derivação implícita: $(2xy+x^2y')+(y^2+2xyy')=3 \Rightarrow (x^2+2xy)y' = 3-2xy-y^2$. Lista 2, ex. 4a.

(2) Calcule $\lim_{x\to 0^+} xe^{1/x}$ transformando a expressão para usar l'Hôpital. (1pto)

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{e^{x^{-1}}}{x^{-1}}}_{\text{transformação}} \overset{L'H}{\underset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{e^{x^{-1}}(-x^{-2})}{-x^{-2}}}_{\text{derivações}} = \lim_{x\to 0^+} e^{x^{-1}} = \infty.$$

Lista 4, ex. 6c.

(3) Esboce o gráfico da função $f(x) = 3x - x^{1/2}$ para $x \geq 0$. Atenção se houver pontos onde as derivadas não existem. Não é preciso verificar se há assíntotas. (3pts)

$f'(x) = 3 - \frac{1}{2}x^{-1/2} = 3 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ → não existe em 0; → zero em 1/36

$f''(x) = +\frac{1}{4}x^{-3/2} = \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$ → não existe em 0; → nunca é zero

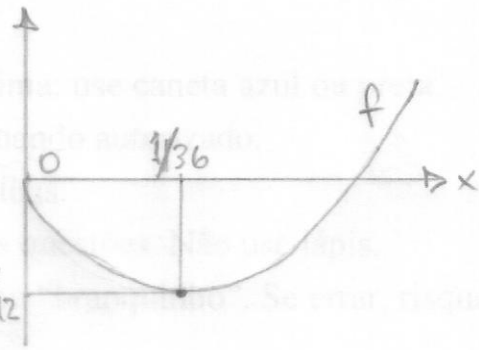
(1pto)

Temos: $f(0)=0$; $f(\frac{1}{36}) = -\frac{1}{12}$.

	0	1/36
$f'(x)$	−	+
$f(x)$	↘	↗
$f''(x)$	+	+
$f(x)$	∪	∪
$f(x)$	↘	↗

(1pto)

(1pto)



Note: $x > \frac{1}{36} \Rightarrow \sqrt{x} > \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2}\cdot 6 = 3$

$\Rightarrow 3 - \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$; analogamente $0 < x < \frac{1}{36}$;

sempre $1/4\sqrt{x^3} > 0$.

(4) Uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de um quadrado de 60 cm de lado, cortando fora um quadrado de cada um dos quatro cantos e dobrando para cima os lados. Encontre o maior volume que essa caixa pode ter. Justifique que o valor é máximo. (3pts)

Lado dos quadrados removidos (altura da caixa): x; lado do quadrado remanescente: $60-2x$ (lado da base) com $0 < x < 30$.

Volume: $V = (60-2x)^2 x = 3600x - 240x^2 + 4x^3$ (1pto)

Então: $V' = 3600 - 480x + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 300 - 40x + x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 10$ (volume $V = 16.000\ cm^3$) ou $x = 30$ (volume $V=0$) ∴ máximo em $x = 10$ (1pto)

inviável: cortaria tudo fora!

Temos $V'' = -480 + 24x = -240 < 0$ no ponto crítico $\Rightarrow V$ é côncava

Lista 5, ex. 4.

(1pto)