Funções de Uma Variável – BCN 0402
1° quad. 2025 – Noturno – São Bernardo do Campo
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Primeira Prova – Versão X – 21 mar. 2025

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva cada item, apresentando apenas as respostas finais. O primeiro item está resolvido como exemplo. (4pts)

Ex.: Derive x^2.

$$\boxed{2x}$$

(a) Derive $3^x \cos x$.

$$\boxed{3^x (\ln 3) \cos x - 3^x \operatorname{sen} x}$$ (1pto)

(b) Derive $x^4(\pi x - 2)/\ln x$.

$$\boxed{\frac{(4x^3(\pi x-2)+x^4.\pi)\ln x - x^4(\pi x-2)\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}}$$ (1pto)

(c) Determine $\frac{dr}{ds}$ sabendo que $e^{r+4s} + r^2s^2 = 5$.

$$\boxed{\frac{-4e^{r+4s} - 2r^2 s}{e^{r+4s} + 2rs^2}}$$ (1pto)

(d) Derive $\operatorname{sen} e^{\sqrt{x}}$.

$$\boxed{(\cos e^{\sqrt{x}}).(e^{\sqrt{x}}).\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}$$ (1pto)

(c) Derivação implícita: $e^{r+4s}\left(\frac{dr}{ds}+4\right) + 2r\left(\frac{dr}{ds}\right).s^2 + r^2.2s = 0$ e isole $\frac{dr}{ds}$.

(2) Use melhor aproximação linear para estimar $\sqrt{5}$. (2pts)

$a=4$, $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f(4)=2$ e $f'(4)=\frac{1}{4}$

$\therefore \sqrt{5} = f(5) \approx L(5) = f(4) + f'(4).(5-4) = 2 + \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{9}{4}$.

1pto: fórmula da melhor aproximação linear $(L(x) = f(a) + f'(a).(x-a))$

1pto: substituição dos números e cálculo completo.

(3) Assuma que o PIB e a população de um país são dados como funções deriváveis do tempo. Determine a relação entre essas grandezas e suas taxas instantâneas de variação para que a renda per capita (o quociente entre PIB e população) seja constante. (2pts)

$$\begin{cases} x(t) = \text{PIB} \\ y(t) = \text{população} \end{cases} \Rightarrow \text{queremos } \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \qquad \underline{(1\text{pto})}$$

Temos: $\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x'y - xy'}{y^2} = 0 \Leftrightarrow x'y = xy'$. $\underline{(1\text{pto})}$

(4) Esboce o gráfico de $f(x) = (x^2+1)^{-1}$. Não é preciso determinar assíntotas. (2pts)

$$f'(x) = -(x^2+1)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \begin{cases} \text{raiz } 0 \\ \text{sempre definida} \end{cases}$$

$$f''(x) = 2(x^2+1)^{-3}\cdot(2x)\cdot 2x - (x^2+1)^{-2}\cdot 2$$

$$= \frac{8x^2 - 2(x^2+1)}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} \begin{cases} \text{raízes } -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \text{sempre definida} \end{cases}$$

$\underline{1\text{pto}}$

$-1/\sqrt{3}$ $\quad 0 \quad$ $1/\sqrt{3}$

$f'(x)$	+	+	−	−
$f(x)$	↗	↗	↘	↘
$f''(x)$	+	−	−	+
$f(x)$	∪	∩	∩	∪
$f(x)$	↗	↗	↘	↘

$\underline{(1\text{pto})}$

f-valores: $f(0) = 1$, $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{4}$