Funções de Uma Variável – BCN 0402

1º quad. 2025 – Noturno – São Bernardo do Campo

Prof. Vinicius Cifú Lopes

Primeira Prova – Versão Y – 21 mar. 2025

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	——

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva cada item, apresentando apenas as respostas finais. O primeiro item está resolvido como exemplo. (4pts)

Ex.: Derive x^2.

$$\boxed{2x}$$

(a) Derive $4^x \ln x$.

$$\boxed{4^x(\ln 4)\ln x + 4^x \cdot \frac{1}{x}}$$ (1pto)

(b) Derive $x^3(\pi x^2 - 1)/\operatorname{sen} x$.

$$\boxed{\frac{(3x^2(\pi x^2-1)+x^3 \cdot 2\pi x)\operatorname{sen} x - x^3(\pi x^2-1)\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}$$ (1pto)

(c) Determine $\frac{ds}{dr}$ sabendo que $e^{r+4s} + r^2s^2 = 5$.

$$\boxed{\frac{-e^{r+4s} - 2rs^2}{4e^{r+4s} + 2r^2s}}$$ (1pto)

(d) Derive $\sqrt{e^{\operatorname{sen} x}}$.

$$\boxed{\frac{1}{2\sqrt{e^{\operatorname{sen} x}}} \cdot e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x}$$ (1pto)

(c) Derivação implícita: $e^{r+4s}\left(1+4\frac{ds}{dr}\right) + 2rs^2 + r^2 \cdot 2s\frac{ds}{dr} = 0$ e isole $\frac{ds}{dr}$.

(2) Use melhor aproximação linear para estimar $\sqrt{8}$. (2pts)

$a=9$, $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f(9)=3$ e $f'(9)=\frac{1}{6}$

$\therefore \sqrt{8} = f(8) \approx L(8) = f(9) + f'(9)\cdot(8-9) = 3 + \frac{1}{6}(-1) = \frac{17}{6}$

1pto: fórmula da melhor aproximação linear $L(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$

1pto: substituição dos números e cálculo completo.

(3) Assuma que o PIB e a população de um país são dados como funções deriváveis do tempo. Determine a relação entre essas grandezas e suas taxas instantâneas de variação para que a renda per capita (o quociente entre PIB e população) seja constante. (2pts)

$\begin{cases} x(t) = \text{PIB} \\ y(t) = \text{população} \end{cases}$ $\Rightarrow$ queremos $\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{y}\right) \equiv 0$ (1 pto)

Temos: $\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x'y - xy'}{y^2} \equiv 0 \Leftrightarrow x'y \equiv xy'$. (1 pto)

(4) Esboce o gráfico de $f(x) = \ln(x^2+1)$. Não é preciso determinar assíntotas. (2pts)

$f'(x) = (x^2+1)^{-1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$ < raiz 0, sempre definida

$f''(x) = -(x^2+1)^{-2}(2x) \cdot 2x + (x^2+1)^{-1} \cdot 2$

$= \frac{-4x^2 + 2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$ < raízes $-1, 1$; sempre definida

} 1 pto

$-1 \quad 0 \quad 1$

$f'(x)$	−	−	+	+
$f(x)$	↘	↘	↗	↗
$f''(x)$	−	+	+	−
$f(x)$	∩	∪	∪	∩
$f(x)$	↷	↳	⤴	↱

(1 pto)

f-valores: $f(0) = 0$, $f(\pm 1) = \ln 2 > 0$