Funções de Uma Variável – BCN 0402 – 1º quad. 2025 – Prof. Vinicius Cifú Lopes
Segunda Prova – Versão X – 06 maio 2025

Nome legível	**Número RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva cada item, apresentando apenas as respostas finais. O primeiro item está resolvido como exemplo.

Ex.: Calcule $\int 2x\, dx$.

$$x^2 + C$$

(a) Calcule $\int t\,\text{sen}(t^2/8)\ dt$. (1pto)

$$-4\cos\left(\frac{t^2}{8}\right) + C$$

$\begin{cases} u = t^2/8 \\ du = t\,dt/4 \end{cases}$

(b) Calcule $\int e^{(e^s+s)}\, ds$. (1pto)

$$e^{e^s} + C$$

$\begin{cases} u = e^s;\ e^{u+s} = e^u . e^s \\ du = e^s\, ds \end{cases}$

(c) Calcule $\int \frac{3-x}{x(x-1)}\, dx$. (1pto)

$$2\ln|x-1| - 3\ln|x| + C$$

$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$

(d) Um cabo de w metros tem densidade $z(q)$ (em kg/m) para q medido em metros a partir de uma ponta. Qual é a massa do cabo? (1pto)

$$\int_0^w z(q)\, dq \qquad (\text{kg})$$

(2) Calcule $\int x\cos(\pi x)\, dx$, exibindo cálculos completos. (2pts)

$$\int x\cos(\pi x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int x\, d\,\text{sen}(\pi x) = \frac{1}{\pi}\left(x\,\text{sen}(\pi x) - \int \text{sen}(\pi x)\, dx\right) \quad (\underline{1pto})$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(x\,\text{sen}(\pi x) - \frac{1}{\pi}\int \text{sen}(\pi x)\, d(\pi x)\right)$$

$$= \frac{x}{\pi}\,\text{sen}(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x) + C \quad (\underline{1pto})$$

(3) Para $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrável e $a, b \in \mathbb{R}$, vale: $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_{\text{mín}(a,b)}^{\text{máx}(a,b)} |f(x)|\, dx$.

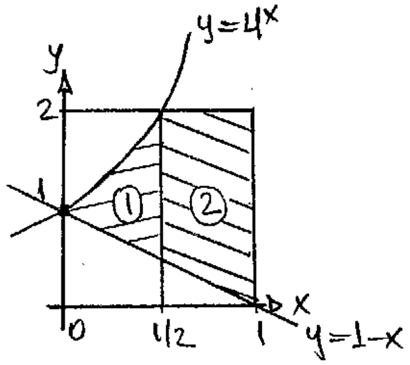
(a) Dê um motivo geométrico e informal para essa desigualdade. (1pto)

(b) Justifique o uso de $\text{mín}(a,b)$ e $\text{máx}(a,b)$ na segunda integral. (1pto)

(a) O gráfico de f pode estar acima (área A_1) ou abaixo (área A_2) do eixo das abscissas, mas o de $|f|$ sempre acima. Então $\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$ e $\int_a^b |f(x)|\,dx = A_1 + A_2$, sendo $a \leq b$.

(b) Temos $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \geq 0$, mas se $a > b$ então $\int_a^b |f(x)|\,dx \leq 0$.

(4) Calcule a área da região dada por $y \leq 4^x$, $y \leq 2$, $y \geq 1 - x$ e $x \leq 1$. (2pts)



$$\text{Área} = \underbrace{\int_0^{1/2} \left(4^x - (1-x)\right) dx}_{1} + \underbrace{\int_{1/2}^{1} \left(2 - (1-x)\right) dx}_{2} \quad (1\text{pto})$$

$$= \left[\frac{4^x}{\ln 4} + \frac{x^2}{2} - x\right]_0^{1/2} + \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{1/2}^{1} = \left(\frac{2}{\ln 4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right) -$$

$$- \left(\frac{1}{\ln 4} + 0 - 0\right) + \left(\frac{1}{2} + 1\right) - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{2} \quad (1\text{pto})$$