Funções de Uma Variável – BCN 0402 – 1º quad. 2025 – Prof. Vinicius Cifú Lopes
Segunda Prova – Versão Y – 06 maio 2025

Nome legível	**Número RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva cada item, apresentando apenas as respostas finais. O primeiro item está resolvido como exemplo.

Ex.: Calcule $\int 2x\, dx$.

$$\boxed{x^2 + C}$$

(a) Calcule $\int s \cos(s^2/6)\ ds$. (1pto)

$$\boxed{3 \operatorname{sen}\left(\frac{s^2}{6}\right) + C}$$

$\begin{cases} u = s^2/6 \\ du = s\,ds/3 \end{cases}$

(b) Calcule $\int e^{(x+e^x)}\ dx$. (1pto)

$$\boxed{e^{e^x} + C}$$

$\begin{cases} u = e^x;\ e^{x+u} = e^x e^u \\ du = e^x dx \end{cases}$

(c) Calcule $\int \frac{4t-6}{t(t-2)}\ dt$. (1pto)

$$\boxed{\ln|t-2| + 3\ln|t| + C}$$

$\frac{A}{t} + \frac{B}{t-2}$

(d) Um cabo de z metros tem densidade $p(w)$ (em g/cm) para w medido em centímetros a partir de uma ponta. Qual é a massa do cabo? (1pto)

$$\boxed{\int_0^{(100z)} p(w)\, dw \qquad (g)}$$

Também foi aceito $\int_0^{z} p(w)\,dw$.

(2) Calcule $\int x \operatorname{sen}(\pi x)\, dx$, exibindo cálculos completos. (2pts)

$$\int x \operatorname{sen}(\pi x)\, dx = -\frac{1}{\pi}\int x\, d\cos(\pi x) = -\frac{1}{\pi}\left(x\cos(\pi x) - \int \cos(\pi x)dx\right) \quad (\underline{1pto})$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(x\cos(\pi x) - \frac{1}{\pi}\int \cos(\pi x)\, d(\pi x)\right)$$

$$= -\frac{x}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\operatorname{sen}(\pi x) + C \qquad (\underline{1pto})$$

(3) Para $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrável e $a, b \in \mathbb{R}$, vale: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_{\text{mín}(a,b)}^{\text{máx}(a,b)} |f(x)|\,dx$.

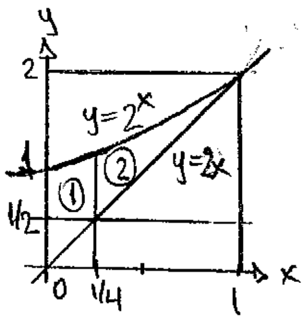
(a) Dê um motivo geométrico e informal para essa desigualdade. (1pto)

(b) Justifique o uso de $\text{mín}(a,b)$ e $\text{máx}(a,b)$ na segunda integral. (1pto)

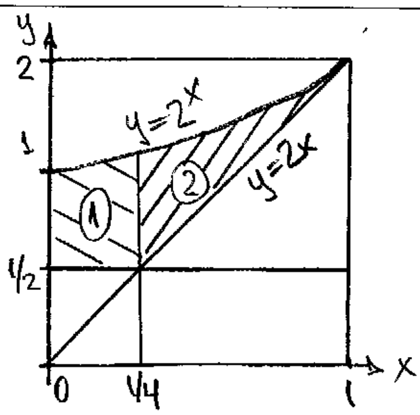
(a) O gráfico de f pode estar acima (área A_1) ou abaixo (área A_2) do eixo das abscissas, mas o de $|f|$ sempre acima. Então $\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2$ e $\int_a^b |f(x)|dx = A_1 + A_2$, sendo $a \leqslant b$.

(b) Temos $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \geqslant 0$, mas se $a > b$ então $\int_a^b |f(x)|dx \leqslant 0$.

(4) Calcule a área da região dada por $y \leq 2^x$, $y \geq 2x$, $y \geq 1/2$ e $x \geq 0$. (2pts)



ou maior:



$$\text{área} = \underbrace{\int_0^{1/4} \left(2^x - 1/2\right) dx}_{①} + \underbrace{\int_{1/4}^{1} \left(2^x - 2x\right) dx}_{②} \qquad (1\text{pto})$$

$$= \left[\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{x}{2}\right]_0^{1/4} + \left[\frac{2^x}{\ln 2} - x^2\right]_{1/4}^{1} = \left(\frac{2^{1/4}}{\ln 2} - \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{\ln 2} - 0\right) +$$

$$+ \left(\frac{2}{\ln 2} - 1\right) - \left(\frac{2^{1/4}}{\ln 2} - \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{\ln 2} - \frac{17}{16} \qquad (1\text{pto})$$