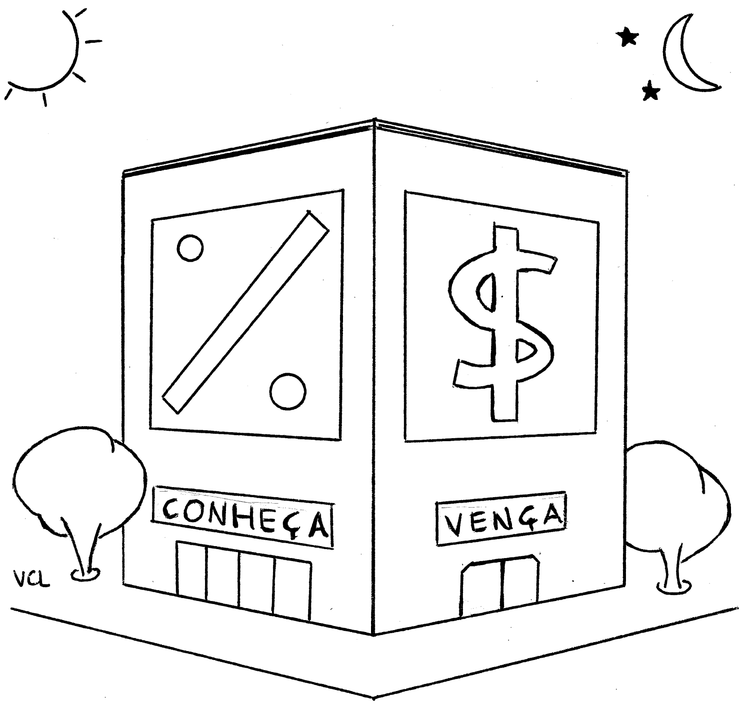
O DINHEIRO CONTADO

— introdução aos cálculos financeiros —



Sumário

Apresentação **iii**
Avisos iv

1 Revisão de juros **1**
1.1 O conceito e a expressão do juro 1
1.2 A capitalização composta 6
1.3 Investimento *versus* dívida 13

2 Cálculos com juros compostos **16**
2.1 Teoria e cálculos 16
2.2 Métodos práticos 18

3 Equivalência de capitais e taxas **24**
3.1 Taxas equivalentes para períodos múltiplos 24
3.2 Taxas nominal, efetiva e real 28
3.3 Cálculos sob o postulado da equivalência 30
3.4 Inflação e planejamento 35
3.5 Impostos sobre o rendimento 39

4 Primeiro Ensaio **46**

5 Comparações entre alternativas **48**
5.1 Método do custo total 49
5.2 Método do valor atual 54
5.3 Método da taxa de retorno 59

6 Séries de pagamentos e rendas **66**
6.1 O cotidiano 66
6.2 Diversidade e formalização 68
6.3 Alguns cálculos 72

7 Financiamentos e amortizações **79**
7.1 A filosofia 79
7.2 Os planos SAC e Price 84
7.3 Detalhes no Brasil 92
7.4 Cálculos adicionais 93

8 Segundo Ensaio **98**

Algumas soluções **100**

Referências **102**

Apresentação

A urgência da educação financeira tem sido crescentemente reconhecida há décadas, mas sua concretização ainda está distante. Apesar de esforços para incluí-la em currículos e divulgá-la na mídia, os jovens e adultos adquirem muito mais noções de idiomas ou de condução veicular na educação básica ou em escolas especializadas do que sobre gestão de seu próprio dinheiro, orçamento, controle de gastos, impostos, poupança e previdência — inevitavelmente com ônus a si mesmos e ao sistema social de bem-estar e com grande perda de sua liberdade de escolha e capacidade de atuação cidadã.

A educação financeira é uma matéria interdisciplinar, necessitando contribuições da Psicologia, da Sociologia, da História, da Economia (sem dúvida!) e do Direito. Entretanto, como envolve "contas", manipulação simbólica e raciocínio dedutivo, frequentemente o professor de Matemática e o engenheiro são chamados a ministrar os diversos tópicos de juros, regimes de pagamento e alternativas financeiras.

Nosso propósito, neste trabalho, é instrumentalizar o professor para a discussão da Matemática envolvida, criando um cenário integrado e motivador para os conhecimentos de exponenciais e logaritmos, progressão geométrica, polinômios, entre outros. Também buscamos esclarecer ou introduzir alguns daqueles aspectos interdisciplinares, de modo que o professor possa fundamentar sua apresentação ao público da educação básica e, afinal, dedicar-se a este que é um dos interesses pivotais da Matemática: a dedução de consequências complexas a partir de poucos princípios simples.

Ressaltamos, assim, que este NÃO é um curso de educação financeira. Entretanto, o texto é fruto de um material elaborado originalmente como exemplo para educação a distância e quando o autor, ao mesmo tempo, buscava um prosaico financiamento imobiliário. Mantivemos a redação voltada ao público final do professor de educação financeira e incluímos os convites para discussões e pesquisas diversas e os enunciados dos exames, que seriam organizados no próprio ambiente virtual. Os exercícios são poucos e apenas ilustram um direcionamento possível; contudo, também constatamos que, no nível proposto por este trabalho, muitos tópicos interessantes e pontuais podem ser ensinados mais efetivamente como prática: assim procedemos e alertamos o usuário sobre a importância das questões propostas.

Acolhemos via `vinicius@ufabc.edu.br` as sugestões, correções e críticas de todos os usuários, mas *não avaliamos situações individuais, nem oferecemos aconselhamento, em hipótese nenhuma.*

São Bernardo do Campo
Agosto de 2020

Avisos

Este livro não oferece operação financeira, não recomenda investimento, plano previdenciário ou opção de tributação, nem garante rentabilidade ou protege contra prejuízo. Todo interessado deverá consultar PROFISSIONAL ESPECIALIZADO E CERTIFICADO *para avaliar, de acordo com seu perfil e informações pessoais, o que mais lhe convém.*

1

Revisão de juros

Neste primeiro capítulo, revisaremos o conhecimento básico a respeito de juros que se estuda na escola. Na Seção 1.1, compreenderemos o juro como um "preço" ou valor de "aluguel" do próprio dinheiro e revisaremos a operação de porcentagem. Depois, na Seção 1.2, veremos como essa perspectiva induz ao chamado *sistema de juros compostos.* Finalmente (Seção 1.3), reconheceremos que "investimento" e "dívida" são duas entidades simétricas, de modo que o estudo sobre uma é o mesmo sobre a outra.

1.1 O conceito e a expressão do juro

Você empresta dinheiro de graça? Muitas vezes, emprestamos alguns trocados para um amigo comprar um lanche e depois somos reembolsados. Essa devolução pode até demorar, mas sempre se questiona exatamente o valor emprestado. Também, muitas vezes um amigo, um vizinho ou um familiar empresta uma quantia para que alguém possa fazer um reparo em casa ou comprar um remédio. Nesse caso, a quantia a devolver é a mesma. Esse valor é chamado *principal* ou *capital.*

Porém, se a quantia é tomada de uma instituição financeira, vemos que o *montante,* isto é, o valor a ser pago para quitar a dívida, é maior que o capital. Por quê?

Para descobrir, vejamos algumas situações:

1. Emprestar dinheiro pode ser como emprestar um outro bem qualquer. Se alugamos uma casa ou um equipamento, ao fim da locação (se não for renovada), retornamos o item. Mas, além disso, também pagamos pela locação, ou seja, o aluguel. Do mesmo modo, raciocina-se que quem "aluga" o dinheiro deve restituir o capital e também pagar pelo "aluguel".

2. Quem cede o dinheiro para outra pessoa, obviamente, ficou sem usar aquele dinheiro. Essa quantia poderia ter sido empregada em um investimento ou uma aquisição, o que renderia mais algum dinheiro ou conforto. Pode-se argumentar que quem devolve o dinheiro pague também por essa "oportunidade perdida".

3. Quem tem o capital pode ter medo de calote para emprestá-lo. Ao cobrar a mais pelo principal, o financiador obtém uma espécie de "seguro". Um banco também tem gastos internos com administração para emprestar o dinheiro, cobrando então uma "taxa de serviço", que também pode ser fixa e vir identificada à parte.

4. Cem reais daqui a vinte anos não comprarão o mesmo que cem reais hoje. A inflação "come" o valor do dinheiro. Portanto, se vamos devolver algum dinheiro, é justo que seja o mesmo não em termos numéricos, mas em termos do que ele "representa" ou pode comprar. Fala-se de *correção monetária* nesse caso, tecnicamente distinto dos casos de juro.

Os economistas e outros pensadores, através dos séculos, vêm observando essas e outras situações. As origens do juro podem ser ainda mais esmiuçadas ou desdobradas em diversos motivos e teorias. Para nós, o que importa é que tudo isso é juro!

> *O juro representa o custo do capital. É geralmente formulado como uma proporção (em porcentagem) do valor principal.*

Porcentagens, números e notação

A porcentagem é um modo de indicar uma proporção e, literalmente, significa "partes de um cento". Por exemplo, 5% ou "cinco por cento" significa 5 das 100 partes iguais em que dividimos um valor ou medida. Se trabalhamos com R$ 300, cada uma das partes é R$ 3, logo, 5% de R$ 300 são cinco dessas partes, perfazendo R$ 15.

Essa operação vale também para números maiores que 100: por exemplo, 205% de R$ 300 são o produto de R$ 3 por 205, ou seja, R$ 615.

Para lembrar, observe que o símbolo % contém uma barra de divisão e os dois zero de 100, embora um tenha "subido" a barra. Outras representações semelhantes de proporção, que conhecemos nas ciências, são o "por mil" (‰) e as "partes por milhão" (p.p.m.). Todas elas são *adimensionais,* mesmo ao expressar juros, em vista da razão:

$$\frac{\text{R\$}\,15}{\text{R\$}\,300} = \frac{15}{300} = 0{,}05 = 5\% \quad (\text{NÃO R\$}\,5\%!)$$

Em nossos cálculos, indicaremos a taxa pela letra r do inglês *rate.* Assim, evitamos conflito com as letras i, j (do inglês *interest* e do português "juro") que podemos ter usado na escola e que, na prática matemática, servem comumente para outros fins.

Por exemplo, um juro de cinco por cento corresponde a $r = 5\%$. Para trabalhar com contas, sempre substituímos o símbolo % pela fração 1/100, de modo que $r = 0{,}05$ nesse exemplo. Nosso cálculo anterior fica assim:

$$\text{R\$}\,300 \times 5\% = \text{R\$}\,300 \times 5 \times \frac{1}{100} = \text{R\$}\,15.$$

Ao indicarmos o capital de R$ 300 por C, isso é o mesmo que calcular $rC = \text{R\$}\,15$.

Vimos que o juro é somado ao capital para determinar a quantia que o substitui. Com essa notação, os R$ 300 com acréscimo de 5% ficam:

$$\text{R\$}\,315 = C + rC = C(1 + r).$$

O termo 1 *está presente em separado, mesmo para porcentagens maiores que* 100*:* calculamos acima quanto é 205% de R\$ 300, então:

$$\text{R\$}\,300 \times (1 + 205\%) = \text{R\$}\,300 + \text{R\$}\,615 = \text{R\$}\,915,$$

ou, de modo equivalente,

$$\text{R\$}\,300 \times (100\% + 205\%) = \text{R\$}\,300 \times 305\% = \text{R\$}\,915.$$

Em um desconto, o valor dado pela proporção é subtraído do capital, de modo que obtemos $C(1 - r)$: no nosso exemplo, R\$ 300 com desconto de 5% são

$$\text{R\$}\,285 = C - rC = C(1 - r).$$

Para que a operação tenha significado — "não podem tirar mais do que põem" — e $C(1-r)$ seja positivo, r fica limitado a 100%. Exceto por isso, o sinal de subtração pode vir explícito na fórmula, usando-se $r > 0$, ou embutido no número, usando-se $r < 0$.

A multiplicação por $1 + r$ *é a que sempre carregaremos nos cálculos.* Apesar da praticidade das calculadoras, as sequências típicas de digitação $300 + 5\%$ e $300 - 5\%$ não têm significado, já que o primeiro termo tem dimensão (reais, ou unidades) e o segundo não.

A porcentagem é frequentemente entendida como expressando uma variação: de fato,

$$r = \frac{\text{valor final} - \text{valor inicial}}{\text{valor inicial}} \times 100\% = \frac{C(1+r) - C}{C}.$$

A manipulação algébrica permite-nos, também, identificar a diferença entre o "desconto de loja" acima, $C(1-r)$, e o conceito de *valor atual* que aprenderemos posteriormente,

$$\frac{C}{1+r},$$

embora frequentemente se chame "desconto" também. Não só as fórmulas são diferentes (como arranjos dos símbolos), como também não são equivalentes, isto é, não produzem sempre o mesmo resultado para cada C e r. (Expressões diferentes podem ser equivalentes, como 2^{m+n} e $2^m 2^n$.) Ao encontrarmos C e r para os quais $C(1-r) = C/(1+r)$, é por acidente desses valores e não por uma propriedade geral em nosso estudo.

Por último, são comuns duas abreviaturas quando se requer a especificação de uma unidade de tempo: taxas *ao mês* e *ao ano* vêm indicadas a.m. e a.a., respectivamente.

Variações das próprias porcentagens:

Como usamos porcentagem para indicar variações, também é possível denotar uma mudança dessas taxas por porcentagem. No entanto, essa não é a prática comum, porque cria dúvidas. Usam-se o "ponto percentual" (p.p.) e o "ponto base" (b.p., do inglês *base point*), que é um centésimo do ponto percentual, assim:

- taxa de 5% que sobe 2 p.p. resulta em 7% (NÃO 5,1%);
- taxa de 5% que sobe 2 b.p. resulta em 5,02%.

(Cuidado: é possível encontrar p.p. usado no lugar do símbolo %.)

Números redondos:

Alguns números têm propriedades que devem ser exploradas:

- 360 tem muitos divisores e é uma boa aproximação para o número de dias do ano;
- $365 = 52 \times 7 + 1$, então os dias da semana avançam um por ano;
- são aproximadamente 52 semanas em um ano;
- são aproximadamente 21 dias úteis em um mês, 252 em um ano.

Veremos, na Seção 2.2, a "regra de 72" que é um meio simples para calcular o prazo no qual um capital se duplica.

Por fim, saiba que, se falarem em “mil ao contrário” e “o-cortado”, querem dizer 0001 e 0 (zero escrito $\emptyset$ para distinguir da letra “O”), respectiva e francamente...

Discussão

Vamos discutir tudo isso num fórum? Acesse a Ferramenta FÓRUNS e participe na discussão *Juros na prática.*

Em sua participação, conte-nos:

- Em que situações os juros aparecem em sua vida?
- Como isso influenciou você? Tem algum “causo” envolvendo juros com você, sua família ou um amigo seu?
- Onde mais você ouve falar de juros? Qual é o significado?
- Essas perguntas valem também para as porcentagens e o modo de calculá-las: qual é a sua história com essa Matemática?
- Há alguma coisa na mensagem de algum colega que você não entendeu ou não conhecia, como uma forma, uma cobrança, um cálculo ou uma utilidade dos juros?

Questionário

A fim de orientarmos melhor nossos estudos nas próximas seções e capítulos, vamos identificar as formas de juros que encontramos na prática e que queremos entender? Acesse a Ferramenta ENQUETES e vote: os itens refletem nossa discussão no fórum.

1.2 A capitalização composta

Vimos na Seção 1.1 que um meio de entender o juro é como o aluguel a ser pago pelo dinheiro tomado a empréstimo. Como serão cobrados dois ou mais desses aluguéis? Isto é, como se comporta o montante no chamado *prazo,* um número n de períodos?

Digamos que os juros cobrados serão mensais, à taxa r, sobre um capital inicial C. Ao fim do primeiro mês, portanto, devemos o principal C e os juros rC, o que totaliza $C(1+r)$.

1. Caso paguemos o "aluguel" agora, ou seja, devolvamos rC, continuaremos devendo C.

   - Passado o segundo mês, o raciocínio se repete: pagamos os juros rC e continuamos devendo o principal.
   - Depois de n meses, teremos pago n aluguéis, que somam nrC; se finalmente devolvermos também o capital inicial C, então teremos pago $C(1+nr)$ (montante).

   Esse é o chamado *sistema de juros simples.*

Há algumas situações reais em que isso realmente ocorre: alguns planos de financiamento especificam o pagamento dos juros, ou uma "rolagem de dívida" em que o devedor consegue abater somente o juro cada mês. Um caso análogo acontece se, em vez de termos contraído uma dívida, investimos em uma poupança e, a cada mês, sacamos o juro mensal.

2. Contudo, e se deixarmos o juro acumular? Inicialmente, podemos não perceber muita coisa, porque o montante e as taxas envolvidas são tão pequenos que o detalhe se perde nos centavos.

   - Mas, de fato, ao fim do primeiro mês, o devedor deve não apenas o capital C mas também o juro rC.
   - Passado o segundo mês, calcularemos o aluguel sobre toda a dívida, porque todo esse dinheiro ficou emprestado. São $C(1+r)$ devidos no início deste segundo mês, mais o juro $rC(1+r)$ sobre esse todo. Isso é igual a $C(1+r)^2$.
   - Após n meses, a dívida se eleva ao valor $C(1+r)^n$: confira a demonstração mais abaixo.

   Esse é o *sistema de juros compostos,* ou seja, "juro sobre juro".

A operação de potenciação é o que a composição de juros traz de novo. A velocidade de crescimento do montante a cada etapa será eventualmente maior neste sistema, porque multiplicamos o valor anterior por $1+r$ em vez de somar rC. (Essa análise também fazemos mais abaixo.) Em resumo:

> *Ao fim de cada período, se o juro não for descontado, ele é incorporado ao montante. É o* CRESCIMENTO EXPONENCIAL OU GEOMÉTRICO *de uma dívida ou um investimento.*

Jamais se pode dizer que juros simples sejam melhores ou piores que juros compostos: não somente isso depende de nossa perspectiva como devedor ou credor, mas também da comparação de alternativas que estudaremos futuramente. Vimos, porém, que deixar acumular uma dívida ou um investimento levará, finalmente, a um montante maior.

Também não se trata de enquadrar uma situação real em um dos dois extremos. Cada investimento ou dívida tem "regras do jogo" bem definidas e que permitem um raciocínio como os apresentados acima: calculamos o que se acrescenta ou não ao montante ao fim de cada período.

Por exemplo:

3. Suponha que a operação dure um ano. Nos primeiros quatro meses, há uma "cortesia" da financeira e nenhum pagamento precisa ser feito. Ao fim de cada um dos outros oito meses, deverão ser pagos os juros apurados naquele mês, e a dívida encerrada ao fim do ano.

   - A dívida ao fim dos quatro meses, como não foi feito abatimento, eleva-se a $C(1+r)^4$.
   - Em cada um dos oito meses restantes, portanto, pagamos r vezes esse valor, ou seja, $rC(1+r)^4$.
   - Ao longo dos oito meses, pagamos juros totais $8rC(1+r)^4$.
   - Finalmente, no término do ano, pagamos o principal desses oito meses, que vale $C(1+r)^4$.

- No total, pagamos $C(1+r)^4 + 8rC(1+r)^4$, isto é,

$$C(1+r)^4(1+8r).$$

Essa "cortesia" foi de graça? Vejamos: primeiro calculamos

$$\begin{aligned}(1+r)^4(1+8r) &= (1+4r+6r^2+4r^3+r^4)(1+8r)\\ &= 1+12r+38r^2+52r^3+33r^4+8r^5.\end{aligned}$$

Se os juros fossem pagos mensalmente também naqueles quatro meses, o fator correspondente seria apenas $1+12r$. (Cuidado: não basta comparar apenas $(1+r)^4$ e $1+4r$.)

É claro que essa carência poderá ser útil ou vital para o tomador do empréstimo. No caso de quem financia um imóvel, deverá realmente gastar com reformas ou mobília e poderá não ter como assumir as parcelas do financiamento imediatamente. Isso não significa que o credor esteja perdendo dinheiro, pelo contrário!

Demonstração de $M = C(1+r)^n$ por indução matemática:

O Princípio da Indução Matemática (PIF) é um postulado que afirma o seguinte: se temos uma afirmação A envolvendo um número n, o que indicamos como $A(n)$, e desejamos provar que $A(n)$ vale para todos os inteiros $n \geqslant 1$, então só precisamos provar

$$A(1) \quad \text{e} \quad A(n) \Rightarrow A(n+1),$$

entendendo que: em $A(1)$, fazemos a substituição $n=1$; na implicação, n é fixo, mas arbitrário.

Usaremos o PIF para demonstrar que $M_n = C(1+r)^n$ no regime de juros compostos. É essa identidade que chamaremos de $A(n)$.

Primeiro, queremos provar $A(1)$, que é a *base* da indução. Substituindo $n=1$, vemos que $A(1)$ significa $M_1 = C(1+r)$, como já havíamos demonstrado acima para depois de um período.

Agora, provaremos $A(n) \Rightarrow A(n+1)$, que é o *passo* da indução. Fixe n e assuma $A(n)$, com o objetivo de deduzir $A(n+1)$. Desse modo, após n períodos, podemos assumir que $M_n = C(1+r)^n$. Quanto será M_{n+1}? Esse é o montante obtido após utilizar o anterior M_n como capital e realizar mais um período de rendimento. Então, como vimos para M_1, temos:

$$M_{n+1} = M_n(1+r) = \big[C(1+r)^n\big](1+r) = C(1+r)^{n+1}.$$

Na segunda igualdade, utilizamos a identidade sobre M_n assumida como $A(n)$. Observando os membros extremos, obtemos precisamente o que $A(n+1)$ enuncia, como desejado.

Em outras aplicações, o PIF requer alguma manipulação algébrica para identificar $n+1$ como um termo corretamente posicionado substituindo n do enunciado. Também existem outras formas do PIF.

Análise do crescimento do montante:

Na escola, conhecemos as funções exponenciais por seus gráficos. Para avaliar seu crescimento, recorremos ao Cálculo. Substituímos o número de períodos n por uma variável contínua t e derivamos o montante sob juros compostos:

$$\begin{aligned} M &= C(1+r)^t; \\ \dot{M} &= C(1+r)^t \ln(1+r); \\ \ddot{M} &= C(1+r)^t \big[\ln(1+r)\big]^2. \end{aligned}$$

Observamos uma propriedade da função exponencial: suas derivadas são múltiplas dela mesma.

Precisamos assumir apenas que a exponencial com base $1+r$ é crescente de alguma forma. A partir disso, para $t \geqslant 0$, obtemos

$$\ddot{M} \geqslant C\big[\ln(1+r)\big]^2.$$

Chame γ ao membro direito, que é constante e positivo.

Como $\ddot{M}$ é a taxa de variação de $\dot{M}$, concluímos que esta cresce ao menos como γt. (Para tanto, pode-se usar o Teorema do Valor Médio, ou integrar os dois lados da desigualdade de 0 a um t^*.) Por sua vez, como $\dot{M}$ é a taxa de variação de M, concluímos que esta cresce ao menos como $\gamma t^2/2$.

Em outras palavras, $\ddot{M}$ é a "aceleração" de M que, então, ao menos (em muito, na realidade) superará uma grandeza "uniformemente variada" com aceleração γ. O mesmo raciocínio mostra que M cresce mais que as funções polinomiais de qualquer grau!

Exercícios

Para termos certeza de que todos entendemos os motivos que levam à capitalização composta e os raciocínios envolvidos, acesse a Ferramenta EXERCÍCIOS e responda as questões propostas.

1. Assinale a alternativa correta a respeito desta situação: Um determinado título (fictício) de crédito privado paga *cupons* mensais por seis meses após sua compra e, ao fim do sexto mês, estorna o valor original. Cada cupom consiste dos juros no período e é depositado em conta corrente.

   A) Como é feito em todo investimento, o regime adotado é o de juros compostos.

   B) O valor bruto recebido pelo investidor inclui os juros sobre os cupons.

   C) Esse investimento é um exemplo de regime de juros simples.

   D) Para determinar o montante a ser recebido pelo investidor, são necessárias mais informações.

2. Assinale a alternativa correta a respeito de juros simples e compostos:

   A) Com taxa constante e um capital fixado, o valor dos juros compostos é sempre o mesmo.

   B) O juro composto é calculado, em cada período, sobre o montante do período anterior.

   C) O valor do juro simples não depende do capital inicial.

D) Uma rolagem de dívidas em que se abate o juro em todo período obedece ao regime de juros compostos.

3. Assinale a alternativa correta a respeito desta situação: Um cidadão investe R$ 3.000 em um título pré-fixado que rende 0,5% ao mês.

   A) Após quatro meses, o cidadão receberá exatamente R$ 60 em juros.

   B) O cidadão poderá sacar seu capital após um mês e receber os juros de quatro meses após esse período.

   C) O juro de R$ 15 após um mês é pequeno demais para ser incorporado ao capital.

   D) Se o cidadão sacar o juro mensalmente, o valor será R$ 15 e não estará sujeito a juros futuros.

4. Uma concessionária vende um carro por R$ 30.000 a juros de 2% ao mês. Nos primeiros três meses, nenhum pagamento é feito. Nos meses subsequentes, a concessionária recebe os juros, mas não o principal. Qual é a situação ao fim de um ano da compra?

   A) Pagaram-se R$ 1.800 e ainda se devem R$ 30.000.

   B) Pagaram-se R$ 7.272,96 e ainda se devem R$ 30.000.

   C) Pagaram-se R$ 5.730,52 e ainda se devem R$ 31.836,24.

   D) Pagaram-se R$ 5.400 e ainda se devem R$ 29.399,28.

5. Um cidadão quer fazer uma reforma em seu banheiro e compra todo o material de construção necessário com um empréstimo, desembolsando R$ 4.000. A taxa cobrada pela financeira é de 15% ao mês. O cidadão consegue pagar até R$ 2.000 ao fim de cada mês. Quando é possível quitar a dívida?

   A) Após dois meses, pagando R$ 2.000 no primeiro e R$ 2.000 no segundo.

b) Após três meses, pagando R$ 1.200 no primeiro, R$ 2.000 no segundo e R$ 2.000 no terceiro.

c) Após três meses, pagando R$ 2.000 no primeiro, R$ 2.000 no segundo e R$ 1.290 no terceiro.

d) Após três meses, pagando R$ 2.000 no primeiro, R$ 2.000 no segundo e R$ 1.138,50 no terceiro.

1.3 Investimento *versus* dívida

Vamos parar por um momento para reconhecer a dualidade dos papéis de pagador e investidor. Com isso, queremos dizer que todo investimento pode ser formulado como uma dívida e reciprocamente. Vejamos algumas situações:

1. Por exemplo, um cidadão resolve investir periodicamente em uma poupança. Ele abre uma conta poupança em um banco e deposita algum dinheiro de tempos em tempos. Além dos depósitos, a poupança rende juros sobre o saldo acumulado.

    - Do ponto de vista do cidadão, ele é um investidor e poderá resgatar seu investimento quando quiser, no caso da poupança, ou em uma data preestabelecida no caso de outra modalidade de investimento.
    - Do ponto de vista do banco, esse cidadão é um credor, já que pode resgatar o investimento; portanto, o banco tem uma dívida com o cidadão.

Conforme o tempo passa e o cidadão efetua novos depósitos, o banco contrai mais dívida, tanto referente a esses depósitos como referente aos juros acumulados dos saldos anteriores. É claro que, em ambos os pontos de vista, o montante da conta poupança é o mesmo. Desse modo, independente da perspectiva, o cálculo para chegar a esse montante também é o mesmo.

2. Outro cidadão compra um bem a prestações financiadas pela loja. Nesse caso, a loja faz um investimento (com certo risco), “pagando” o bem (por seu valor à vista) ao cidadão para receber um montante específico ao fim das prestações.

3. Ainda outro cidadão deseja preparar-se melhor para sua terceira idade formando um plano de previdência complementar.

   - Apesar do aporte inicial, do prazo e das mensalidades serem todas fixadas pela instituição previdenciária no regulamento do plano, ainda assim se trata de um investimento por parte do cidadão.

   Chegado o término da arrecadação, o cidadão passa a receber uma pensão paga pela instituição.

   - Então, ao longo do plano, a instituição contraíra uma dívida para com o cidadão e, na fase de benefício, trata de quitá-la, ainda que de acordo com um regulamento.

4. Porém, é possível entender essa última situação de outro jeito, desmembrando as duas partes do plano (arrecadação e pensão). Ao assinar o contrato do plano, logo no início dos eventos, o cidadão *assumiu* um compromisso, notadamente, de um montante que, após a fase de arrecadação, poderá gerar-lhe uma pensão estipulada. Desse modo, o que o cidadão fará durante o prazo de arrecadação é proceder à quitação dessa “dívida”. De qualquer forma, os valores envolvidos são os mesmos.

Portanto, tanto faz se desejamos fazer um investimento para atingir um determinado objetivo (o montante) ou pagar uma dívida para honrar um capital. Os cálculos a serem realizados dependem apenas da taxa de juros envolvida, do número de prestações e do valor de cada uma, do capital inicial e do montante. A perspectiva não importa, porque sempre há dois agentes, um no papel de credor, outro no de devedor.

Exercícios

Podemos visualizar melhor essa dualidade entre investimento e dívida praticando nosso entendimento em várias situações. Que tal acessar a Ferramenta EXERCÍCIOS e conferir?

1. Assinale a alternativa correta:

   A) Uma consequência da dualidade pagador–devedor é que, para calcularmos quantidades de interesse em uma transação financeira, não importa quem paga e quem recebe o dinheiro.

   B) Não existem perspectivas opostas quando uma cidadã investe em poupança, afinal o dinheiro é sempre dela e ela não deve nada a ninguém.

   C) Quando um cidadão toma dinheiro emprestado, a instituição financeira fez um investimento cujo montante é o valor emprestado.

   D) Se uma cidadã faz um financiamento bancário para pagar um apartamento novo, a empresa construtura tem prejuízo porque a dívida foi transferida para um banco.

2. Assinale a alternativa correta:

   A) Juros mais baixos beneficiam devedores e credores do mesmo modo, em vista da natureza dual da dívida como investimento.

   B) A dualidade pagador–devedor só é observada em transações estritamente financeiras, isto é, não envolvendo outros bens além de dinheiro.

   C) Quem recebe o capital é o devedor e precisa pagar também juros pelo aluguel do dinheiro.

   D) Pagamento de aposentadoria é prestação de serviço e não configura investimento ou dívida.

2

Cálculos com juros compostos

Neste capítulo, revisaremos a fórmula deduzida para juros compostos e praticaremos diversos cálculos com ela. Também veremos como simplificar algumas das contas mais complexas envolvidas.

2.1 Teoria e cálculos

Vimos no capítulo anterior que juros incidem sobre juros quando um montante é reaplicado ao fim de cada período. Portanto, se sobre um capital C rendem juros a uma taxa r por período, após n períodos completos o montante é

$$M = C(1 + r)^n.$$

Lembre também que, definido r, devemos convertê-lo para porcentagem: $r = 0{,}005$ corresponde a 0,5%; $r = 2{,}1$ corresponde a 210%.

Em geral, n é um inteiro e, apesar de podermos calcular potências quando o expoente é fracionário, há situações em que o resultado obtido é incorreto. Por exemplo:

1. Atualmente, a poupança no Brasil paga juros somente se o investimento permanecer imobilizado na conta pelo mês completo e não será pago juro sobre depósitos sacados após quinze dias apenas.

2. Nos investimentos e dívidas com cálculo *pro rata,* que conheceremos na Seção 3.1, via de regra a menor unidade de tempo é o dia (referindo-se ao pernoite do dia útil), não havendo juros por hora.

Inversamente, para saber qual o capital C que deve ser investido para resultar em um montante M após n períodos e taxa de juros r, calculamos

$$C = \frac{M}{(1+r)^n} = M(1+r)^{-n}.$$

Chamaremos a isso o cálculo do *valor atual* de M.

Suponhamos agora que desejamos obter o montante M e dispomos do capital C. Se o investimento paga juros à taxa r, por quantos períodos devemos deixar o dinheiro investido? Ou seja, quanto é o *prazo* n? A partir da identidade original, isolamos $(1+r)^n = M/C$ e aplicamos $\log_b$ aos dois lados, onde a base b é de livre escolha, ou usamos a definição de logaritmo e a mudança de base para obter

$$n = \log_{(1+r)}(M/C) = \frac{\log_b(M/C)}{\log_b(1+r)} = \frac{\log_b M - \log_b C}{\log_b(1+r)}.$$

Se o resultado for fracionário e a situação exigir períodos completos (como a poupança), então n é, de fato, o inteiro imediatamente superior ao resultado, conhecido como o *teto* do resultado, e o montante correspondente apresentará um saldo sobre o objetivo original.

Veremos na próxima seção como simplificar essa conta.

Finalmente, suponhamos que desejamos obter M dispondo de C em no máximo n períodos. Qual é a taxa mínima r com a qual atingiremos nosso desejo? Aqui, também é preciso uma operação além das quatro fundamentais, já que

$$r = \sqrt[n]{M/C} - 1 = \frac{\sqrt[n]{M} - \sqrt[n]{C}}{\sqrt[n]{C}}.$$

Atenção à subtração de 1!

Em resumo, a equação $M = C(1+r)^n$ envolve quatro quantidades. Informadas três dessas quantidades, podemos determinar a quarta.

Exercícios

Qual formulinha devemos usar e quem é M, C, n ou r para substituirmos corretamente? Pratique seu entendimento acessando a Ferramenta EXERCÍCIOS e respondendo os problemas enunciados.

1. Um cidadão quer investir R$ 2.000 por três meses em uma poupança, que rende 0,5% ao mês. Qual expressão dá o valor da conta em reais após três meses?

   A) $\log(0{,}005/2000)/\log(3)$.

   B) $2000 \times 1{,}005^3$.

   C) $2000/1{,}005^3$.

   D) $2000^{1/3} - 1$.

2. Um cidadão investiu em uma poupança que somente paga rendimentos ao fim do mês. Seu investimento inicial foi R$ 3.000 e ele quer resgatar R$ 3.100 para comprar um sofá. À taxa de 0,6% ao mês, quantos meses ele deverá esperar?

   A) Cinco meses.

   B) Cinco meses e alguns dias.

   C) Seis meses.

   D) Faltam informações para completar o cálculo.

2.2 Métodos práticos

Tratando-se de cálculo financeiro, operar com potências, logaritmos e raízes é muito frequente. Felizmente, essas operações podem ser efetuadas em uma calculadora científica simples. A própria calculadora do computador tem um modo científico satisfatório que está disponível em seu menu.

É importante verificar como essas operações são feitas na calculadora. Tenha certeza de ler atentamente o manual e entender como inserir os dados necessários. Por exemplo, para obter 2^5, quais teclas devem ser pressionadas e em qual ordem? Cheque se não obteve 5^2, que é bem diferente.

Veremos o uso de um programa de planilhas nas Seções 5.3, que também recorre à plotagem de gráficos, e 7.2.

Mesmo uma calculadora comum, sem mecanismos específicos para esses cálculos, pode ser muito útil. Em geral, pressionar a tecla de igualdade repetidas vezes após uma multiplicação produz uma sequência de potências inteiras. Para determinar um expoente máximo ou mínimo, portanto, basta verificar quando o resultado mostrado pela máquina ultrapassa o valor fixado. Novamente, é preciso cuidado com a ordem das operações realizadas, como para obter $1 + 2 \times 5$.

Há também tabelas numéricas, elaboradas em termos das taxas mais comuns, dando os valores de várias expressões em termos dessas taxas e de vários prazos.

Somas em vez de produtos:

Já testemunhamos pessoas somando e subtraindo pontos percentuais e "escapando ilesas". Por exemplo, um aumento de 3% seguido de um desconto de 2% resulta em um aumento de 1%. Isso é verdade?

Vejamos: um preço inicial P aumentado em 3% é $P \times 1{,}03$; com um desconto subsequente de 2%, torna-se $(P \times 1{,}03) \times 0{,}98$, que é

$$P \times 1{,}0094.$$

É claro que 1,0094 está muito próximo de 1,01, donde se conclui que o aumento líquido resultante é *aproximadamente* 1%.

Não é sempre que podemos fazer essa aproximação (experimente com 90% e 80% em lugar de 3% e 2%). Então, quando podemos fazê-la?

Quando o produto das taxas envolvidas é muito pequeno comparado com sua soma: se r, s são duas taxas, cada uma positiva ou negativa, então

$$(1 + r)(1 + s) = 1 + (r + s + rs)$$

e podemos ignorar rs se for menor que $r + s$ a ponto de não influir no primeiro dígito dessa soma, ou seja, $|10rs| < |r + s|$. Em particular, se r e s são menores que 10% em valores absolutos, então rs é menor que 1% e pode ser ignorado se não considerarmos frações de ponto percentual.

Analogamente, podemos simplificar potências de uma taxa fixa. Pelo Teorema Binomial,

$$(1 + r)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k = 1 + nr + \binom{n}{2} r^2 + \dots$$

Suponhamos que $r = 0{,}5\%$, ou seja, a componente básica da remuneração mensal da poupança antiga. Tomemos $n = 12$ para determinar a remuneração anual. Então

$$(1 + r)^n \approx 1{,}06168,$$

enquanto

$$1 + nr = 1{,}0600 \quad \text{e} \quad 1 + nr + \binom{n}{2} r^2 = 1{,}06165.$$

Concluímos que, especificamente com estes valores, as potências r^k para $k \geqslant 2$ pouco contribuem para o resultado final, apesar dos coeficientes binomiais serem muito grandes e haver $n - 1$ deles.

A regra de 72:

Na falta de uma calculadora ou tábua de logaritmos, podemos calcular o prazo para *duplicar* o capital (ou seja, ter $M/C = 2$) assim:

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + r)} \approx \frac{\alpha}{100r} \quad \text{com } \alpha = 69,\ 70 \text{ ou } 72.$$

Podemos escolher α conforme for mais fácil dividir por $100r$ que, por sua vez, é o valor da taxa expresso ainda em porcentagem. Para taxas menores, prefira 69 ou 70, mas 72 é particularmente fácil de dividir por ambos 2 e 3. Por exemplo:

1. Com uma correção de 5% a.a., se hoje uma multa cobra R$ 110, em quanto tempo cobrará R$ 220? Calculamos

$$n \approx \frac{70}{5} = 14 \quad \text{(em anos).}$$

   A título de comparação, o prazo correto é cerca de 14,2 anos.

2. Com um jurinho de 0,1% a.m. na poupança, o montante dobra a cada

$$n \approx \frac{69}{0{,}1} = 690$$

   meses (ou 57 anos e meio). O prazo inteiro correto é de 694 meses. Isso mostra que 69 ou $100 \ln 2$ são parâmetros melhores para taxas menores e que, nesse caso, ainda não vale a aproximação de juros simples, devido ao número muito alto de reincidências: com estes, seriam 1.000 meses.

Essa aproximação já era ensinada por Pacioli no final do séc. XV e talvez fosse conhecida dos babilônicos. É possível chegar a ela por analogia com os juros simples (em que $n = 1/r = 100/100r$) e pela inspeção manual de várias taxas e de quantas vezes precisam incidir até dobrar o capital.

Hoje, tomamos a série de Taylor de $\ln(1+x)$ "centrada em 0", ou seja, mais apropriada para valores pequenos de x:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

Como fizemos para o Teorema Binomial, podemos avaliar quais potências de x contribuem pouco para a somatória. À parte, precisaremos de $\ln 2 \approx 0{,}693$: como $x = 1 = 100\%$ é grande demais, seriam necessários vários termos da série para obter esse valor.

Então, usando apenas a aproximação pelo primeiro termo:

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+r)} \approx \frac{0{,}693}{r} = \frac{69{,}3}{100r}.$$

Se incluirmos o segundo termo, obtemos

$$n \approx \frac{0{,}693}{r - r^2/2} = \frac{138{,}6/(2-r)}{100r}$$

e podemos ver que, para r por volta de 8%, o numerador da regra original seria corrigido para cerca de 72.

O ponto foi deixar a regra preparada por meio de cálculos mais sofisticados, para poder usá-la mentalmente quando quiser.

Interpolação linear:

Interpolações, também de muito uso dos babilônicos, são métodos de aproximar uma função f entre dois valores contíguos em uma tabela, digamos $f(a)$ e $f(b)$. A interpolação linear resulta em:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Ela substitui o gráfico de f entre os dois pontos conhecidos pelo gráfico de outra função L, linear, que é o segmento de reta que une esses pontos. Para tanto, o segmento sobre o intervalo $[a, x]$ deve ter o mesmo coeficiente angular daquele sobre $[a, b]$:

$$\frac{L(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

de onde resulta a expressão acima.

Exercícios

A Ferramenta EXERCÍCIOS traz mais desafios para você testar suas capacidades de cálculo e simplificação!

1. Um aumento de 1% é repetido por três períodos. O que NÃO é correto afirmar?

   A) Sob juros compostos, o aumento resultante é cerca de 3%.

   B) Sob juros simples, o aumento resultante é exatamente 3%.

   C) Sob juros compostos, o aumento resultante é exatamente 3%.

   D) A mesma aproximação vale para outras taxas próximas a 1%.

2. Assinale a alternativa INCORRETA:

   A) Juros compostos não podem ser somados ou subtraídos, mas essas operações fornecem boas aproximações para pequenas porcentagens.

   B) Para o cálculo financeiro, é estritamente necessária uma calculadora científica gráfica.

   C) Um aumento de 30% seguido de um desconto de 20% não é o mesmo que um aumento de 10%, sequer aproximadamente.

   D) A longuíssimo prazo, mesmo com taxas menores que 1%, juros compostos serão maiores que juros simples.

3. Justifique as fórmulas para o cálculo exato do prazo de duplicação, nos casos de juros compostos e simples. Em seguida, deduza também as fórmulas exatas para o prazo de sucessivos descontos chegarem à metade do valor inicial.

4. Sugira uma regra para o prazo em que uma taxa r resulta em um aumento de 20%.

5. Sabendo que $\ln 1{,}10 \approx 0{,}095$ e $\ln 1{,}20 \approx 0{,}182$, estime $\ln 1{,}13$.

3

Equivalência de capitais e taxas

Como em toda a Matemática, vários modos de calcular um objeto financeiro (montante, renda ou capital) devem sempre levar ao mesmo resultado. Neste capítulo, vamos aplicar esse princípio a diferentes situações e verificar como taxas de juros podem existir implicitamente. Também aprenderemos a pôr esse fenômeno em números e em palavras. Com o mesmo espírito, iniciaremos discussões de como incluir a inflação e os impostos em nossos raciocínios.

3.1 Taxas equivalentes para períodos múltiplos

Suponhamos que procuramos um investimento em que aplicaremos um capital durante um ano, sob o regime de juros compostos. Suponhamos também que um banco nos oferece duas opções:

A) juros pagos mensalmente a uma determinada taxa r;

B) juros pagos trimestralmente a outra taxa s.

No primeiro caso, deixaríamos nosso capital acumulando por 12 períodos, e no segundo, por 4 períodos.

Se quisermos determinar qual opção resultará em maior lucro, basta calcular o montante de cada aplicação (usando o valor do capital, a taxa de juros e o número de períodos) e compará-los. Talvez sobre um desses investimentos incida mais impostos que sobre o outro, de modo que deveríamos considerar essas deduções e comparar os montantes líquidos, mas esqueçamos isso no momento.

Ao chegar ao banco, cada cliente tem uma necessidade específica quanto a prazos, liquidez e carências. No entanto, não fossem essas diferenças, todos os clientes optariam pelo investimento mais lucrativo e o banco não teria por que oferecer outros produtos. Assim, podemos vincular as duas opções "A" e "B" entre si, para que ambas ofereçam o mesmo lucro.

> *Qualquer que seja o investimento escolhido para aplicar um capital C, o montante M após um determinado prazo* (*um ano em nosso exemplo*) *deverá ser o mesmo.*

Então, em nosso caso, podemos utilizar os mesmos nomes C e M para ambas as situações: na primeira, $M = C(1+r)^{12}$; na segunda, $M = C(1+s)^4$. Portanto, devemos ter

$$(1+r)^{12} = (1+s)^4,$$

donde

$$s = r^3 + 3r^2 + 3r$$

e verificamos que as taxas de juros dos dois investimentos estão atreladas uma a outra. A potência 3 é exatamente o número de vezes que o período curto de "A" cabe no período longo de "B". O fato de o prazo total ser um ano, ou outro múltiplo comum dos dois períodos, não altera esse resultado.

> *Sob tal vínculo, as taxas r e s são chamadas* EQUIVALENTES *e diz-se que a taxa com período menor r é calculada* PRO RATA.

A taxa média de juros:

Uma definição de *média* de dadas magnitudes é um único valor que, repetido o mesmo número de vezes sob a mesma operação, produz o mesmo resultado.

Em nosso caso, digamos que um capital C é submetido a taxas de juros $r_1, r_2, \ldots, r_n$, possivelmente com repetição de valores, em n períodos sucessivos. A taxa média $\overline{r}$ será aquela que produzir o mesmo montante no mesmo prazo:

$$C(1+\overline{r})^n = C(1+r_1)(1+r_2)\ldots(1+r_n),$$

de modo que

$$\overline{r} = \sqrt[n]{\prod_{t=1}^{n}(1+r_t)} - 1.$$

Ou seja, um exemplo de média geométrica ocorre entre os fatores de acumulação de capital $(1+r_t)$.

Exercícios

Na Ferramenta Exercícios, montamos diversas situações para você determinar se há ou não equivalência de taxas. Após resolver esses problemas manualmente, estaremos prontos para considerar cálculos abstratos na Seção 3.3.

1. Suponha um capital de R$ 300 submetido a juros de 2% mensais por seis meses. Assinale a alternativa que resulta no mesmo montante, exceto por arredondamento, no mesmo prazo:

   a) R$ 400 submetidos a 1,5% trimestrais.
   b) R$ 250 submetidos a 8,4% bimestrais.
   c) R$ 310 submetidos a 9,0% semestrais.
   d) R$ 110 submetidos a 20% mensais.

2. Assinale a única alternativa que não é equivalente às demais, exceto por arredondamento:

A) 3,4% ao semestre.

B) 2,3% ao quadrimestre.

C) 0,3% ao mês.

D) 6,9% ao ano.

3. Determine a situação que oferece informações completas para determinar a equivalência de taxas:

   A) Um cidadão pode formar uma poupança para comprar um bem à vista, ou comprá-lo financiado no cartão de crédito.

   B) Uma cidadã pode investir em um fundo de investimento com rentabilidade mensal ou em um fundo trimestral, ambos isentos de imposto de renda.

   C) Ela pode investir no fundo mensal isento ou em um novo fundo trimestral sujeito a imposto de renda sobre os lucros.

   D) Por fim, ela pode investir em dois fundos mensais, um tributado pelo lucro, outro tributado pelo montante.

4. Segundo várias teorias econômicas, as taxas de juros oferecidas por diversos investimentos e financiamentos devem ser equivalentes. Assinale a alternativa que NÃO é compatível com essa proposição.

   A) Se um investimento for mais rentável que os demais, todos os investidores procurarão esse investimento. Do ponto de vista de quem recebe o investimento, que será um devedor, o dinheiro virá em abundância, ficará barato, não valerá um “aluguel” tão alto, e a taxa de juros diminuirá. Isso é a razão das taxas tenderem a ser equivalentes.

   B) A equivalência de taxas requer que o mesmo capital, seja qual for o regime de investimento (prazo, taxa etc.), acabe por produzir o mesmo montante após um prazo múltiplo comum.

   C) Na prática, a equivalência de capitais e taxas requer considerar os impostos incidentes sobre os investimentos, ou seja, devem ser consideradas as partes líquidas dos montantes.

D) Investimentos com prazos e carências diferentes não podem ser comparados, porque um termina antes que outro e, assim, seu montante ficaria “parado” enquanto outros continuariam acumulando juros.

3.2 Taxas nominal, efetiva e real

Há alguns modos de apresentar-se uma taxa, ou seja, divulgá-la aos interessados. Quando lemos um prospecto sobre um serviço bancário, ou ouvimos uma oferta de pagamento parcelado em uma loja, tomamos contato com uma taxa de juros determinada, mas é preciso saber sobre o quê ela se refere.

Em outras palavras, há vários tipos de taxa a considerar — vamos listá-las todas e explicá-las logo a seguir:

Efetiva: corresponde precisamente ao período proposto.

Nominal: seria produzida pelos juros simples ao longo do prazo (um ano, ou outro intervalo de tempo).

Efetiva anual: será produzida pelos juros compostos ao longo do ano.

Real, ao contrário das *aparentes:* leva em conta a depreciação do poder de compra do dinheiro ao longo do tempo, devida à inflação, o que estudaremos com detalhes na Seção 3.4.

Como costume, trabalhamos com um principal C:

1. A taxa efetiva é aquela que buscamos utilizar em nossos cálculos e que temos indicado pela letra r. Ela se refere aos juros gerados em um único período.

2. Agora, consideremos o caso em que há n períodos em nosso prazo, por exemplo, 12 meses em um ano. Na capitalização simples, ao longo dos n períodos, obteríamos nrC como juros. Considerá-los como uma única porcentagem $\widehat{r}$, isto é, iguais a $\widehat{r}C$, implica em

$$\widehat{r} = nr \quad \text{(essa é a taxa nominal).}$$

Por exemplo, juros efetivos de 3% a.m. correspondem a juros nominais de 36% a.a. e vice-versa.

Porém, veremos na próxima seção que o regime composto é o sistema que transporta o valor do dinheiro ao longo do tempo. Portanto, é esse regime que devemos adotar para comparar diferentes investimentos e pagamentos.

3. C torna-se, ao fim dos n períodos, o montante $C(1+r)^n$. Se o prazo for considerado um único período, a taxa equivalente $\widetilde{r}$ satisfaz a equação $C(1+\widetilde{r}) = C(1+r)^n$, de modo que

$$\widetilde{r} = (1+r)^n - 1 \quad \text{(essa é a taxa efetiva no prazo).}$$

Assim, juros efetivos de 3% a.m. correspondem a juros efetivos anuais de cerca de 42,58%, não apenas os 36% a.a. apresentados nominalmente. A diferença, é claro, pode ser substancial e causar tanto prejuízo como lucro indevidos.

> *Dada a taxa nominal, determine qual é o período utilizado e calcule a taxa efetiva nele. Somente então, calcule a taxa efetiva no prazo ou outro múltiplo do período.*

4. Na Seção 3.4, veremos como considerar a inflação para determinar a taxa real correspondente a uma taxa aparente. Isso será possível porque a inflação também atua em cada período.

Exercícios

Para adquirirmos agilidade no cálculo e no discernimento, propomos diversos problemas de conversão entre tipos de taxas na Ferramenta Exercícios.

1. Assinale a alternativa correta:

   a) Os valores nominal e efetivo de uma taxa nunca são iguais.

   b) Apresentar valores nominais, em lugar de efetivos, é ilegal.

C) Os valores nominal e efetivo de uma taxa, quando expressos em termos de um único período, são iguais.

D) A taxa real é computada a partir da taxa efetiva para um único período.

2. Com uma taxa nominal de 15% ao ano e períodos mensais, qual cálculo é correto?

   A) A taxa efetiva mensal é 1,17%.

   B) A taxa efetiva mensal é 1,25%.

   C) A taxa real mensal é 1,52%.

   D) A taxa efetiva anual é 14,55%.

3. Quanto é, anualizada e ao mês, tanto nominal como efetiva, a taxa efetiva de 9% por trimestre?

3.3 Cálculos sob o postulado da equivalência

Para determinar a equivalência de taxas, alguns princípios são fundamentais. Enunciamo-los juntos e justificaremos em seguida:

Composição: permite a comparação de valores situados em momentos diferentes, porque a exponenciação transforma somas em produtos.

Distributividade: permite-nos dividir um capital em diversas "contas virtuais", calcular os juros incidentes sobre cada um deles, somá-los e obter os juros totais.

Comutatividade e associatividade: permitem trocarmos a ordem em que os juros são calculados.

Na prática, esses princípios são exemplificados assim:

1. A uma taxa r e um prazo n, multiplicamos um capital C pelo fator $F_n = (1 + r)^n$ para conhecer seu valor, como montante, passados os n períodos.

- Em seguida, suponhamos que se passem mais m períodos: então multiplicamos por F_m, obtendo o produto de fatores $F_n F_m$.
- O resultado é o mesmo se começarmos com o capital e aguardarmos diretamente a passagem de $n + m$ períodos, de modo que $F_{n+m} = F_n F_m$.
- Já para determinar o capital, dado o montante ao final dos n períodos, invertemos a operação dividindo tal montante por F_n.
- Porém, vemos que $(F_n)^{-1} = F_{-n}$, ou seja, podemos multiplicar aquele montante por F_{-n}, tratando a "volta no tempo" como um prazo negativo.

O ponto a ser notado é que sucessivas multiplicações pelos fatores F_j sempre conduzem ao mesmo resultado, contanto que o prazo (positivo ou negativo) final seja o mesmo.

Ou seja: dado um valor original e conhecida a taxa de juros, podemos determinar o valor correspondente em qualquer momento no passado ou no futuro; mais, o valor correspondente tem todos os mesmos efeitos. As "escalas" ou "paradas" não interferem com o desenvolvimento dos juros compostos. (Veja, ainda, a nomenclatura técnica ao fim desta seção.)

2. Também a uma taxa r, se dividirmos um capital

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_k,$$

então, após n períodos, dividiremos o montante

$$C(1+r)^n = C_1(1+r)^n + C_2(1+r)^n + \ldots + C_k(1+r)^n.$$

Isso se aplicará quando pagarmos parcelas em períodos distintos, sendo conveniente separar os montantes em contas distintas.

Por exemplo, suponhamos que depositemos parcelas P_1, P_2, P_3 em uma poupança, agora, daqui a um mês e daqui a dois meses, respectivamente. Então:

- Imediatamente, o saldo é P_1.
- Após um mês, temos o montante $P_1(1+r)$ acrescido do novo depósito e o saldo é $P_1(1+r)+P_2$.
- Após outro mês, temos o montante $[P_1(1+r)+P_2](1+r)$, mais o terceiro depósito, e o saldo é $[P_1(1+r)+P_2](1+r)+P_3$.

Esse é o cálculo por acumulação, verificando o saldo anterior, as entradas e saídas, os juros a cada período. Por outro lado, note:

- O primeiro depósito, após dois meses, terá montante $P_1(1+r)^2$.
- O segundo renderá juros por apenas um mês e totalizará $P_2(1+r)$.
- O terceiro não renderá juros imediatamente, ficando em P_3.
- A soma dessas "contas" é $P_1(1+r)^2+P_2(1+r)+P_3$.

Ora, a soma obtida é exatamente o saldo calculado período a período!

3. Suponha que um preço P tenha um aumento a uma taxa r e um desconto a outra taxa d, ambas $r, d > 0$. Não importa a ordem em que o aumento e o desconto sejam aplicados, um antes ou depois que o outro: o valor final será o mesmo, porque

$$P(1+r)(1-d) = P(1-d)(1+r).$$

Agora, para que as operações se "neutralizem", resultando no valor original P, devemos ter $(1+r)(1-d)=1$, donde

$$r = \frac{d}{1-d} \quad \text{ou} \quad d = \frac{r}{1+r}.$$

Nesse caso, percebemos que $d \neq r$, ou seja, a um aumento de 5% não bastará um desconto posterior de 5%.

Note também que é preciso ter $d < 1$, ou seja, se o desconto chegar a 100%, não haverá aumento que o compense. Continuaremos essa discussão em uma atividade!

4. Por fim, suponha que uma sequência de taxas $r_1, r_2, r_3 \dots$ seja aplicada a um capital. Como vimos, não importa a ordem entre elas, o capital será multiplicado por

   $$(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)\dots$$

   e, por sua vez, esse produto pode ser escrito como

   $$1 + (r_1 + r_2 + r_3 + \dots) + (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 + \dots) + (r_1 r_2 r_3 + \dots) + \dots$$

Nessa última expressão, agrupamos os termos conforme seu *grau,* isto é, seu número de fatores — a definição abarca monômios com uma ou mais variáveis.

Composição e isomorfismo:

Cada multiplicação de uma quantia por F_n é o cálculo de uma função $f_n\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $f_n(x) = xF_n$. Então $f_n \circ f_m = f_{n+m}$, o que remete ao nome "juros compostos", e $f_{-n} = f_n^{-1}$.

Associamos também f_t ao prazo t, usualmente inteiro, mas potencialmente qualquer número real, identificando um instante no tempo. Como os períodos se somam ou subtraem, tal associação é um isomorfismo entre $\mathbb{R}$ (conjunto dos instantes t) com a operação de adição e o grupo das funções f_t com a operação de composição, por sua vez isomorfo a $\mathbb{R}_+^*$ (conjunto dos fatores F_t) com a operação de multiplicação: em outras palavras, são três perspectivas de uma mesma estrutura algébrica.

Exercícios

Na Ferramenta Exercícios, continuamos a explorar esses problemas de equivalência de capitais e taxas.

1. Uma cidadã investe em um título de crédito privado que paga os juros periódicos por meio de *cupons* (depositados à parte do título) e devolve o capital no vencimento. Ela procede assim: investe um

capital C por n períodos, depois junta o principal e os cupons e reinveste essa soma por mais m períodos, sempre à taxa r. Responda:

- Qual é o montante M após esse procedimento?
- Qual é o capital necessário C_1 para atingir o mesmo M, após um único investimento por $n+m$ períodos? Compare com C.
- Qual é a taxa r_2 para obter C, investindo-se M pelo "prazo negativo" de $-(n+m)$ períodos? Compare com r.

Esse regime é o de juros compostos?

2. Suponha que o preço líquido de um produto seja P_0 e o preço final, obtido somando-se um imposto de comercialização, seja P.

- O imposto chamado "por fora" é calculado sobre o preço líquido. Assim, se e é a taxa desse imposto, então o valor do imposto é eP_0. Mostre que $P = P_0(1+e)$.
- A base de cálculo do imposto pode ser o preço final, caso em que se diz "por dentro". Nesse caso, com taxa E, o valor é $I = EP$. Mostre que $P = P_0/(1-E)$ e $I = E(P_0 + I)$.
- Para compararmos as duas formas de taxação, devemos fixar P_0 e P. Mostre que, então, $e = E/(1-E)$ e $E = e/(1+e)$.
- Quais são os domínios possíveis para e e E?
- Mostre ainda, sob a mesma hipótese, que

$$e = E + E^2 + E^3 + \dots$$

Discussão

Constatamos que um preço, ou um investimento, pode ter acréscimos e descontos, ou ganhos e perdas, e que a aplicação das taxas pode ser feita em qualquer ordem.

Mas é essa a sua percepção? Acesse a Ferramenta Fóruns e discuta o tópico de *Ganhos e perdas:* primeiro ganhar na loteria e depois perder alguns milhões é o mesmo que perder esses milhões antes e esperar a sorte depois na loteria?

Tentaremos entender juntos por que aquela conclusão não tem essa interpretação!

3.4 Inflação e planejamento

A *inflação* é um aumento nos preços dos bens, serviços e custo de vida em geral, medida como uma proporção, e fala-se também em *perda do poder aquisitivo, ou do valor, da moeda.* No caso de diminuição dos preços, o fenômeno chama-se *deflação,* mas seu mecanismo de cálculo é o mesmo. As causas para a mudança de preços são variadas, como alterações na oferta ou demanda desses bens e serviços.

O preço novo P_1 (ao fim de um período) incorpora, em si, tanto o preço original P (no início do período) como esse aumento ou diminuição causado pela taxa de inflação f, de modo que $P_1 = P(1 + f)$. No próximo período, P_1 funciona como preço inicial e a inflação incide sobre todo ele, gerando o preço $P_2 = P_1(1+f) = P(1+f)^2$. Portanto, a relação entre inflação e preços é aquela de "juros sobre juros" com o mesmo mecanismo da capitalização composta:

$$P_n = P(1 + f)^n.$$

> *O dragão da inflação também tem o poder do crescimento exponencial!*

Qualquer planejamento tem que considerar a inflação ou, passado o tempo e concluído o investimento, faltará dinheiro para cumprir o objetivo, isto é, adquirir o bem ou serviço desejado, ou a dívida será mais difícil de pagar. Por exemplo:

1. A inflação foi 3% e o rendimento de uma aplicação foi 5% ao longo de um intervalo de tempo. No início daquele intervalo, deixei de comprar 50 kg de batata com R$ 100 que investi nessa aplicação. Após esse tempo e resgatada a aplicação, quanta batata posso comprar com o montante de R$ 105? O quilo de batata custava R$ 2,

agora custa R$ 2,06. Serão cerca de 50,971 kg de batata, não os 52,500 kg que esperaríamos.

2. Calcularemos em geral que uma inflação de 7% ao ano torna *negativo* o rendimento obtido em uma poupança que pague 6% no mesmo período.

Digamos que nosso investimento pague juros a uma taxa r por período e que a inflação seja f por período. Note que, para planejamentos, é impossível prever o valor exato de f, mas podem-se fazer estimativas, como veremos em uma atividade.

Um capital investido C, ao fim de n períodos, terá produzido um montante $M = C(1+r)^n$. Ambas as quantidades são descritas em termos de moeda. Porém, o preço P no início dos n períodos transformou-se em $P(1+f)^n$ ao final. Assim, cada unidade de moeda compra, agora, somente $(1+f)^{-n}$ do que comprava antes. Medido em relação ao poder de compra, nosso montante é somente

$$M^* = M(1+f)^{-n} = C\Big(\frac{1+r}{1+f}\Big)^n.$$

Desse modo, o juro real r^* por período do investimento, para o qual $M^* = C(1+r^*)^n$, foi

$$r^* = \frac{1+r}{1+f} - 1.$$

Observe que r^* é negativo precisamente quando $f > r$.

Podemos já determinar r^*, r ou f a partir dos outros com a equação acima ou esta:

$$(1+r^*)(1+f) = (1+r).$$

Caso r, s sejam pequenos, obtemos $r^* + f \approx r$, ou seja, $r^* \approx r - f$.

No primeiro exemplo, o juro real foi por volta de 1,94%, *de modo que o investimento transformou* 50 kg *de batata em cerca de* $50 \times (1{,}0194)$ kg.

Veja também que a manipulação acima assumiu, de forma indissociável, que as taxas r e f referem-se sempre ao mesmo intervalo de tempo (juros mensais e inflação mensal, ou juros diários e inflação diária). No caso de taxas diferentes de inflação nos vários períodos, aplique-as sucessivamente como com os juros.

Em geral, o modo mais simples de considerar a inflação é, preliminarmente, calcular todos os valores desejados, ao longo do tempo, em termos do poder de compra do dinheiro em um determinado instante específico — por exemplo, no "instante zero" do início de um investimento — e somente depois atualizá-los pelas taxas de inflação respectivas.

Cuidados com o planejamento:

Jamais se esqueça, porém, de que a taxa de inflação é diferente para cada tipo de bem (vestuário, alimentação, moradia etc.) e que a inflação futura é uma grande incógnita que, a longo prazo, pode apresentar mais surpresas. Mesmo as economias mais estáveis de nosso tempo já experimentaram épocas de hiperinflação.

> *Ao planejar a aposentadoria distante,* NÃO *basta fazer investimentos que "batam" a inflação média. É preciso estimar o custo de vida nas condições de aposentado, com os gastos que terá ou deixará de ter, e entender a inflação específica desses itens.*

Exercícios

Não perca a oportunidade de praticar esses raciocínios sobre inflação! Na Ferramenta EXERCÍCIOS, há questões específicas para este tópico.

1. Um investimento paga 6% por período, enquanto a inflação no mesmo período é de 4%. Qual alternativa é mais próxima da taxa real paga pelo investimento no período?

A) 10%.

B) 2%.

C) 1,9%.

D) 1,8%.

2. Qual é o raciocínio correto sobre inflação?

   A) Devemos aguardar para resgatar um montante investido, já que o investimento acumula juros compostos e a inflação incide apenas uma vez.

   B) A inflação é um fenômeno exclusivo das economias capitalistas.

   C) A inflação pode ser "driblada" com operações em moedas diferentes.

   D) A inflação mede a desvalorização de uma moeda face a mercadorias e outros custos.

3. O que NÃO corresponde à inflação de 40% em um período:

   A) A multiplicação do capital por 0,60.

   B) A divisão do capital por 1,40.

   C) A multiplicação dos preços por 1,40.

   D) A razão de 1,40 entre fatores de taxas aparentes e reais.

4. O Produto Interno Bruto (PIB) de um país é, a grosso modo, a soma dos preços de todos os produtos e serviços vendidos no país. Em um país fictício, o PIB nominal subiu 30% em um ano e a inflação nesse período foi 20%. Qual é a alternativa mais próxima do crescimento real do PIB?

   A) 10%.

   B) 9,2%.

   C) 8,3%.

   D) 4,1%.

Atividade em grupo

Como podemos prever a inflação futura? Tentaremos usar as taxas do Tesouro Direto como uma bola de cristal!

Forme um grupo com três a quatro colegas e acesse a lista de preços e taxas do Tesouro Direto. Busque um título pré-fixado e um IPCA+ com vencimentos próximos. (A escolha é livre entre títulos de curto ou longo prazo, com ou sem cupom, para investimento ou resgate, porém, deve ser a mesma para os dois títulos.)

Explique a diferença entre as taxas (que vêm anualizadas) e estime a *inflação implícita* nessa diferença. (Essa inflação "embutida" ou "do mercado" é consequência do agrupamento das percepções dos negociantes dos títulos.)

Para mais profundidade, investigue se a inflação estimada varia conforme o prazo (curto ou longo) dos títulos utilizados. Qual embute a maior inflação e qual o motivo?

O grupo deverá identificar-se e apresentar seus dados, data e horário de coleta e cálculos na discussão *Inflação implícita* da Ferramenta FÓRUNS. Poderá também comentar e perguntar sobre os trabalhos dos outros grupos!

3.5 Impostos sobre o rendimento

Além do Imposto de Renda (IR), há também impostos sobre resgate e transmissão de valores (como o IOF e o antigo IPMF–CPMF) e taxas bancárias.

> *Tais tributações precisam ser consideradas quando computamos nossos montantes, já que a rentabilidade e o próprio capital de um investimento — particularmente, a previdência privada! — podem ser comprometidos por impostos.*

Modos de tributação

Algumas operações são tributadas *em definitivo* na fonte e, ao realizar um resgate, recebemos o valor líquido sem espaço para compensações. Outras, como o salário, são tributadas na fonte, mas podemos apresentar deduções fiscais válidas para o *ajuste* na declaração anual. Reconhecer essa distinção é importante para planejar o uso inteligente das deduções ou não ser surpreendido por um saldo de imposto a pagar.

Coisa muito diferente é o modo de incidência do imposto:

Sobre os rendimentos ou "ganhos de capital", isto é, montante menos capital (geralmente sem correção inflacionária), se positivo. Por exemplo, é como se cobra imposto, atualmente, sobre o Tesouro Direto, planos VGBL e fundos de ações.

Integralmente ou sobre o montante, isto é, rendimentos mais capital. Esse é o modo de incidência sobre planos PGBL.

"*Come-cotas*" (seja sobre montante ou sobre rendimentos) é cobrado periodicamente, durante a própria vida do investimento. O imposto é medido em espécie, mas o pagamento consiste de um resgate parcial do próprio investimento, daí seu nome. Ele é o modo utilizado para fundos de várias categorias.

Esses formatos têm conexão com o princípio da *não bitributação:*

1. No caso do PGBL, o capital investido pode ser deduzido (até um certo limite) na declaração de IR como contribuição à previdência, porque depois será taxado no resgate.

2. No caso do VGBL, o capital não pode ser deduzido na declaração de IR como contribuição à previdência no momento do investimento, por não ser taxado no resgate.

Também quanto aos planos de previdência privada, pode-se optar entre duas taxações: *progressiva,* a mesma dos salários e com ajuste na declaração anual, e *regressiva,* com taxas definitivas que diminuem ao longo do prazo.

Nós encontraremos o adjetivo "progressivo" mais duas vezes, uma agora e outra na subseção sobre faixas tributárias, com significados distintos, mas que guardam o mesmo espírito.

Isso porque há várias tabelas *progressivas* para investimentos de diversos tipos (renda fixa ou variável, de curto ou longo prazo). Elas privilegiam aplicações de longo prazo ou desestimulam a migração entre aplicações (o que envolve resgates prematuros), com o propósito de refrear os investimentos de curto prazo que, explica-se, contêm grande parcela de capital meramente especulativo e não produtivo, danoso à economia.

Portanto, em diversos investimentos, é preciso estar atento aos prazos envolvidos, que podem acarretar taxas maiores de IR (geralmente, em meses ou anos) e IOF (em dias).

Imposto com alíquota única

Consideraremos, primeiro, taxas que incidem com uma faixa única e somente no momento do resgate do investimento, como o IR definitivo. Outras situações, como um "imposto de renda come-cotas" ou "faixas de renda", devem ser estudadas mais detalhadamente e com uma formulação diferente, o que veremos a seu tempo. Além disso, trabalharemos apenas com a taxa crua de imposto a ser pago e não consideraremos um eventual ajuste na declaração anual.

Por força da própria regulamentação, a taxa do imposto se distribui sobre o montante correspondente a cada depósito, em separado, de modo que esse montante é taxado conforme o respectivo prazo em que o depósito permaneceu investido. Por isso, suporemos também uma única e específica taxa. (O próximo exemplo, porém, ilustrará uma distribuição explícita.)

Taxação de todo o montante:

Suponhamos que a nossa poupança da Seção 3.3, Exemplo 2, seja na verdade uma previdência sobre a qual incide imposto de 35% sobre todo o montante (não só o ganho). Assim, do montante bruto

$$M = P_1(1+r)^2 + P_2(1+r) + P_3,$$

essa porcentagem será retida como imposto e somente receberemos os demais 65% como o *montante líquido.*

Em termos de uma taxa genérica de imposto d, o valor a ser retido será Md e o líquido será $M - Md$, ou seja, $M(1-d)$. Desse modo,

$$M_{\text{líq}} = M(1-d) = \big[P_1(1+r)^2 + P_2(1+r) + P_3\big](1-d).$$

Aqui, percebemos que também podemos aplicar a distributividade dos juros e reassociá-los:

$$\begin{aligned} M_{\text{líq}} &= \big[P_1(1+r)^2\big](1-d) + \big[P_2(1+r)\big](1-d) + P_3(1-d) \\ &= \big[P_1(1-d)\big](1+r)^2 + \big[P_2(1-d)\big](1+r) + P_3(1-d). \end{aligned}$$

1. Na primeira linha (distributividade), vemos que podemos dividir o imposto a ser pago entre as "contas virtuais" que mencionamos naquela seção, ou seja, cada depósito pode ser considerado à parte e o imposto correspondente também.

2. A segunda linha (comutatividade) mostra que o resultado final seria exatamente o mesmo se, em fantasia, descontássemos o imposto do capital já no momento do investimento e os juros acumulassem-se sobre o depósito líquido.

3. Há ainda mais uma possibilidade a considerar, que fica aparente quando consideramos os juros de um período em vez do montante. Digamos que um investimento renda juros J (em moeda) em um mês. Mesmo sob juros compostos, podemos determinar o quanto de imposto será pago sobre esses juros. De fato, J pode ser considerado como um depósito no momento atual, já que é incorporado ao montante. Conforme o raciocínio acima, então, já podemos descontar o imposto sobre esse depósito, que deixa $J(1-d)$ líquido.

Por exemplo, suponhamos que nossa previdência, sem outros depósitos, esteja rendendo R\$ 300 cada mês e que o imposto a pagar seja 35%. Então, quanto receberemos líquido? Além do capital investido inicialmente e calculado líquido, teremos R\$ 195 líquidos para cada mês investido. É claro que esse valor líquido renderá novos juros, sob o regime composto, mas eles serão líquidos também.

Em resumo, para um investimento cujo montante seja integralmente taxado, o montante líquido $M(1-d)$ é gerado, no mesmo prazo n com o mesmo juro r, por um "capital líquido" $C(1-d)$, do qual já deduzimos o imposto.

Taxação do ganho de capital:

Para um investimento taxado somente sobre os rendimentos, assuma $M = C(1+r)^n$ como usual para a capitalização do investimento e seja d a taxa do imposto. Então o ganho de capital a taxar é $M-C$. Calcularemos, a seguir, o montante líquido de três formas:

1. A diferença entre o montante bruto e o imposto pago.

2. A soma de todo o capital e o ganho líquido.

3. A soma do "capital taxado" (que precisa ser "devolvido"!) e do montante livre de impostos sobre o "capital líquido".

Acompanhe a manipulação:

$$\begin{aligned}
M_{\text{líq}} &= M - \big[(M-C)d\big] && \text{(forma 1)}\\
&= C + (M-C) - \big[(M-C)d\big] \\
&= C + \big[(M-C)(1-d)\big] && \text{(forma 2)}\\
&= C + C(M/C-1)(1-d) && \text{(guarde também!)}\\
&= C - C(1-d) + C(1-d)(M/C) \\
&= Cd + \big[C(1-d)\big](1+r)^n && \text{(forma 3).}
\end{aligned}$$

Note que, a partir da linha que destacamos, obtemos a fórmula mais popular:

$$M_{\text{líq}} = C + C\big[(1+r)^n - 1\big](1-d).$$

Imposto com faixas tributárias

Além da variedade de "alíquotas" por prazo, há também a diversidade de "faixas tributárias" em que o rendimento pode cair.

Em geral, um imposto pode ser um dentre três tipos: *progressivo,* quando é mais caro para transações de maior vulto e almeja a justiça social (tal adjetivo mantém uma conexão com o uso já dado acima); *regressivo,* quando é mais barato para as grandes transações (não se refere à tabela homônima de previdência); ou *proporcional* como o próprio adjetivo diz.

Nesse sentido, o imposto de renda com diversas faixas tributárias é progressivo, como veremos agora.

A título de exemplo, apenas, suponhamos que:

- rendas até R$ 2.000 estejam isentas;
- até R$ 5.000 sejam taxadas em 15%;
- acima disso, sejam taxadas em 20%.

Primeiro, considere o caso do contribuinte que recebia R$ 1.900 e estava isento de imposto. Ao receber um aumento, seu salário passou a R$ 2.100, maior que o limite da primeira faixa. Seria injusto tributá-lo totalmente em 15%: o contribuinte receberia líquidos R$ 1.785, menos que antes, de modo que preferiria não receber o aumento! Posto de outro modo, o imposto de R$ 315 seria maior que o ajuste de R$ 200.

A solução desse conflito é taxar o salário por "partes", cada um à alíquota correspondente. Para vermos como se faz, calculamos: quanto de imposto pagará uma renda de R$ 7.500 ? Procede-se deste modo:

$$\begin{aligned}
\text{imposto (R\$)} &= 2.000 \times 0\% && \text{(os primeiros 2 mil)} \\
&\quad + 3.000 \times 15\% && \text{(a parte entre 2 e 5 mil)} \\
&\quad + 2.500 \times 20\% && \text{(a parte acima de 5 mil)} \\
&= 0 + 450 + 500 = 950
\end{aligned}$$

Portanto, a taxação *efetiva* é

$$d^* = \frac{950}{7.500} \approx 12{,}7\%.$$

(No primeiro exemplo, então, o imposto efetivo é de R$ 15 ou por volta de 0,714%.) Note também que as alíquotas do exemplo são progressivas, já que 20% é maior que 15%.

Experimente criar seus próprios exemplos com as alíquotas reais nas calculadoras do sítio da Receita Federal do Brasil!

Exercícios

Agora, é a vez de de praticar com os impostos! Estão abertas, na Ferramenta EXERCÍCIOS, questões específicas sobre o rugir do Leão...

1. Assuma que a poupança isenta de impostos pague 6% por ano e uma determinada aplicação financeira renda 8% por ano. Qual é a taxa máxima de impostos (sobre a renda e outros, considerados como um todo) que pode incindir sobre essa aplicação de modo que ela seja mais vantajosa que a poupança? Tem importância o prazo do investimento, isto é, o número de períodos que comporão juros? (Discuta ambos os casos de tributação: integral ou sobre o rendimento.)

2. Aprendemos a calcular o imposto de renda a ser pago sobre uma renda bruta, se especificado por faixas de tributação. Determine a *dedução equivalente,* isto é, o quanto deve ser subtraído do salário para que o restante seja multiplicado todo pela mesma alíquota. Utilize as mesmas faixas de tributação e alíquotas de nosso exemplo.

3. No mesmo cálculo por faixas de tributação, basta subtrair o imposto da renda e obter o salário líquido. Como invertemos essa operação, se possível? Ou seja, fixado um valor de renda líquida como meta, qual deve ser o total bruto para que, descontado o imposto, obtenhamos esse valor? Utilize os mesmos dados.

4. Como podemos incluir taxas de carregamento e administração (sejam definitivas no momento de ingresso, sejam periódicas) nos raciocínios desta seção?

4

Primeiro Ensaio

Este exame consiste de um ensaio ou redação que deverá incluir justificativas completas e ser entregue na Ferramenta ESCANINHO.

As taxas envolvidas são nominais de 24% ao ano para juros e 18% ao ano para inflação. (Esses valores são exagerados para fins do exame.) O período base é sempre o mês.

- Determine os juros efetivos, a inflação efetiva e os juros reais, ao mês e ao ano.
- Um cidadão deseja aplicar R$ 3.000 em um investimento que paga a taxa de juros citada acima. Se ele depositar esse capital no investimento, qual será o montante bruto após um ano?
- Nesse investimento, sobre o ganho de capital e independentemente do prazo investido, no resgate incide imposto de renda com tributação definitiva de 25,5%. Quanto será o montante líquido que o cidadão resgatará após um ano de investimento?
- Em vista da inflação, o dinheiro perde poder aquisitivo. Em termos do valor da moeda no momento do depósito no investimento, determine o poder de compra dos montantes bruto e líquido após um ano.

- O cidadão vê, em uma vitrine, que televisores custam R$ 3.000. Considere as opções:

  A) comprar um televisor à vista;

  B) investir seu dinheiro e, após um ano, resgatar o dinheiro e comprar um televisor à vista.

  Qual opção é mais vantajosa financeiramente? Por quê?

- Como o cidadão deve avaliar o valor da diferença entre as opções "A" e "B"?

- Formule uma desigualdade que expressa, contando a incidência do imposto, o cidadão resgatar ao menos uma quantia com o mesmo poder de compra do valor inicial depositado. Determine por quantos meses inteiros o investimento deve ser mantido para tanto.

  Sugestão: verifique se a desigualdade vale para sucessivos n.

5

Comparações entre alternativas

Agora, é tempo de sistematizar três métodos para comparar alternativas financeiras. Isto é, dentre duas ou mais propostas de investimento ou amortização, qual é a mais vantajosa? Em qual receberemos mais ou pagaremos menos?

Nós testaremos todos os métodos em três exemplos:

1. Um encanador cobrará de um cliente o material e o serviço de um reparo. Ele oferece três opções de pagamento:

   a) À vista, por R$ 2.100.

   b) Total de R$ 2.200, metade agora, metade daqui a 30 dias.

   c) Total de R$ 2.400 em três vezes, para 30, 60 e 90 dias.

   Qual opção sai mais barata para o cliente?

2. A feliz proprietária de um automóvel tem três escolhas para pagar seu IPVA:

   a) Um mês antecipado, com desconto de 3%.

   b) No vencimento normal, por R$ 1.400.

c) Três parcelas mensais de R$ 467, mas começando também um mês antecipado.

Qual é a escolha mais vantajosa para ela?

3. O "senhor de seu castelo" recebeu seu primeiro carnê de IPTU, com duas opções:

   a) À vista, com desconto de 5%.
   b) Total de R$ 2.400, em doze mensalidades iguais.

   Esse desconto vale a pena para o contribuinte?

Os três métodos devem sempre produzir resultados compatíveis, ou seja, orientar a mesma escolha entre as diversas opções, contanto que as taxas de juros sejam equivalentes. Qual método aplicar, porém, depende do enunciado do problema e da facilidade operacional.

5.1 Método do custo total

A primeira ideia que vem à mente é comparar montantes ou *custos totais:* qual é o total a ser pago em cada situação? Contudo, devemos lembrar que esse "total" fica relativizado ao momento em que o montante é calculado, já que cada parcela incorpora juros ao longo do tempo.

> *Portanto, comparar montantes requer uma atualização dos valores para um mesmo instante futuro, ou assume que todas as alternativas fazem uso do mesmo prazo.*

Para começar, precisamos fixar uma taxa de juros para os cálculos, chamada *taxa de avaliação,* usando os juros no mercado acessível pelo interessado:

- A gerência de uma loja, em seu planejamento interno, usa a taxa que paga para seus fornecedores.

- Já o cliente pode tomar r como o rendimento líquido, ou efetivo, de um investimento prático e ao seu alcance.

De início, vamos trabalhar abstratamente, com uma taxa literal r. Esclarecemos que, nos três exemplos, r será mensal, em consonância com os períodos propostos.

1. No primeiro exemplo, as alternativas de pagamento são:

   A) R$ 2.100 à vista;

   B) R$ 1.100 agora e R$ 1.100 após um mês;

   C) R$ 800 após um mês, R$ 800 após dois meses e R$ 800 após três meses.

Todos os períodos envolvidos nas três alternativas são mensais e o maior prazo é o de 90 dias. Portanto, escolhemos o término do terceiro mês como momento adequado para calcular os montantes. Temos, para cada opção, o seguinte cálculo em reais.

A) O pagamento à vista acumulará juros por três meses, então

$$M_{\mathrm{A}} = 2.100(1+r)^3.$$

B) A primeira parcela acumulará juros por três meses e a segunda por apenas dois, de modo que

$$M_{\mathrm{B}} = 1.100(1+r)^3 + 1.100(1+r)^2 = 1.100(r^3 + 4r^2 + 5r + 2).$$

C) A primeira parcela acumulará juros por dois meses, a segunda por um e a terceira será paga no mesmo instante de cálculo, sem juros:

$$M_{\mathrm{C}} = 800(1+r)^2 + 800(1+r) + 800 = 800(r^2 + 3r + 3).$$

Com base nisso, dada a taxa r, calculamos diretamente cada montante. A Tabela 5.1 lista os resultados para três taxas totalmente fictícias, usadas para a construção do exemplo.

Opção	5%	8%	12%
A)	2.431,01	2.645,40	2.950,35
B)	2.486,14	2.668,72	2.925,26
C)	2.522,00	2.597,12	2.699,52

Tabela 5.1: Montantes ou custos totais do Exemplo 1.

Desse modo, a 5% a.m., a alternativa "A" será mais econômica para o cliente, enquanto que, a 8% a.m. ou 12% a.m., a alternativa "C" passa a ser melhor. No entanto, note que, entre estas duas taxas, as opções "A" e "B" têm suas posições invertidas.

Por fim, a escolha do cliente dependerá também, em cada caso, se ele tem disponibilidade do valor necessário para arcar com as alternativas mais econômicas que se apresentam em sequência.

Frisamos: foi preciso calcular todos montantes em um único instante! Isto é, o que comparamos *não* foram os valores de cada montante ao término de seus próprios pagamentos, mas os valores que esses montantes teriam ao mesmo tempo. Os montantes das primeiras opções ficariam "parados", *rendendo juros que devem ser computados,* enquanto ainda se pagasse pela terceira opção. Procedendo assim, poderíamos também calcular e comparar esses montantes em qualquer tempo, incluindo no instante inicial, como faremos na próxima seção.

2. Novamente, temos três alternativas:

   A) R$ 1.358 à vista;

   B) R$ 1.400 após um mês (atenção!);

   C) R$ 467 agora, após um mês e após dois meses.

Portanto, o período é o mês e o prazo são dois meses. Assim, os montantes em reais são:

A) $M_{\mathrm{A}} = 1.358(1+r)^2$;

B) $M_{\text{B}} = 1.400(1+r)$, porque resta um mês;

C) $M_{\text{C}} = 467(1+r)^2 + 467(1+r) + 467 = 467(r^2+3r+3)$.

A uma taxa pequena, digamos 1% a.m., a alternativa "A" é preferível à "B". Contudo, se considerarmos a taxa de 7% a.m., os resultados se invertem, ou seja, é melhor NÃO pegar o valor emprestado no cheque especial para aproveitar o "desconto".

Veja ainda que

$$M_{\text{C}} = 467(r^2+3r+3) = 467r^2 + 1401(1+r),$$

isto é, a alternativa "C" é sempre ligeiramente pior que "B".

3. No último exemplo, são apenas duas opções, com período de um mês e prazo de 11 (*onze*) meses. De fato, as parcelas devem ser pagas no início de cada um dos 12 meses, começando agora (simultaneamente ao pagamento à vista), ou seja, entre a primeira e a última há apenas 11 meses. Assim:

   A) R\$ 2.280 à vista, donde $M_{\text{A}} = 2.280(1+r)^{11}$;

   B) 12 parcelas de R\$ 200, donde

$$M_{\text{B}} = 200(1+r)^{11} + 200(1+r)^{10} + \ldots + 200(1+r) + 200.$$

Surge uma oportunidade de aplicar a teoria de progressões geométricas: acompanhando a soma da direita para a esquerda, vemos que é a soma de uma progressão geométrica com termo inicial 200, constante $1+r$ e 12 termos, logo,

$$M_{\text{B}} = 200 \cdot \frac{(1+r)^{12}-1}{(1+r)-1} = \frac{200(1+r)^{12}-200}{r}.$$

Outro jeito de calcular a soma e o montante é multiplicar os dois lados por $(1+r)-1$: a seguir, a primeira linha distribui o fator $(1+r)$ no membro direito e a segunda, o fator -1, de modo que

$$\begin{aligned} rM_{\text{B}} = {} & 200(1+r)^{12} + 200(1+r)^{11} + \ldots + 200(1+r)^2 + 200(1+r) \\ & - 200(1+r)^{11} - 200(1+r)^{10} - \ldots - 200(1+r) - 200. \end{aligned}$$

Note que 11 termos de cima cancelam-se com os de baixo, restando apenas

$$rM_{\mathrm{B}} = 200(1+r)^{12} - 200,$$

que resulta no mesmo montante.

Enfim, M_{A} e M_{B} podem ser calculados e comparados para cada r de interesse.

Método do custo periódico:

Na hipótese de todos os prazos serem idênticos, podemos comparar as prestações em lugar dos montantes? Não diretamente, porque elas podem ser variadas, obedecendo a regras de formação distintas, e aumentar ou diminuir em cada período, independentemente.

Entretanto, de cada montante, poderemos obter a prestação constante para uma série que tem todas as parcelas iguais e que resulta nesse mesmo montante, como descrito na Seção 6.3. Então, sim, compararemos os *custos periódicos* ou anuais, mensais etc., chegando à mesma conclusão. (Por quê?)

Tal abordagem permitirá também a comparação das séries perpétuas que veremos no próximo capítulo, porque, para elas, não há um instante final em que se possa calcular um montante, bem como podem não ter limite no infinito.

Exercícios

Vamos comparar montantes na Ferramenta Exercícios? Lá, você poderá decidir quais são as melhores escolhas dentre vários cenários possíveis!

1. Use o método do custo total para determinar a melhor opção, do ponto de vista do comprador. Assuma que a taxa de juros é 2% ao mês.

   a) Cheques de R$ 2.000 para 30, 60 e 90 dias.

   b) Cheques de R$ 3.000 para 30 e 60 dias.

c) Cheques de R$ 3.000 à vista e para 30 dias.

d) Cheque à vista de R$ 6.000.

2. A poupança de um cidadão tem saldo de R$ 5.000 no presente momento. Ela rende 0,6% ao mês. Use o método do custo total para determinar a melhor opção.

   a) Sacar R$ 2.500 agora e R$ 2.500 daqui a 30 dias.

   b) Sacar R$ 3.000 agora e R$ 2.000 daqui a 60 dias.

   c) Sacar R$ 1.000 agora, R$ 2.000 daqui a 30 dias e R$ 2.000 daqui a 60 dias.

   d) Sacar R$ 2.000 daqui a 30 dias e sacar R$ 3.000 daqui a 60 dias.

5.2 Método do valor atual

Este é o momento de introduzir o novo conceito de valor atual, habitualmente indicado pela letra A.

> *O* VALOR ATUAL *da transação é o seu "valor (ou preço) à vista", ou seja, o capital que poderia ser pago agora e corresponderia, à taxa de juros vigente, aos pagamentos a serem efetuados em suas datas específicas.*

No caso de uma dívida, A é exatamente o valor devido no início. Para tanto, sob a mesma taxa e ao longo de todo o prazo, A teria que acumular juros compostos que o tornassem idêntico ao montante.

Dadas várias propostas financeiras, portanto, escolhemos aquela com valor atual mais vantajoso. Lembre-se de que esse "mais vantajoso" depende do ponto de vista do credor ou do devedor.

Em relação ao método do custo total, a diferença é mínima: trazemos as diversas parcelas para o presente, em vez de um momento comum no futuro, e o instante presente já é o mesmo para todas as opções.

Novamente, indicaremos a taxa de avaliação, isto é, os juros praticados, abstratamente pela letra r, em termos dos períodos mensais comuns aos nossos três exemplos. Com ela, lembre que "trazer uma parcela para o presente" significa *dividir* tal parcela por uma potência de $1+r$.

1. Lembramos as alternativas:

   A) R\$ 2.100 à vista;

   B) R\$ 1.100 agora e R\$ 1.100 após um mês;

   C) R\$ 800 após um mês, R\$ 800 após dois meses e R\$ 800 após três meses.

   A seguir, calculamos seus valores atuais em reais.

A) O pagamento à vista não tem juros, ou seja

$$A_{\mathrm{A}} = 2.100.$$

B) A primeira parcela é à vista. A segunda está um mês no futuro, então deve ser igual ao produto do seu próprio valor atual por $1+r$. Assim,

$$A_{\mathrm{B}} = 1.100 + \frac{1.100}{1+r}.$$

C) Trazemos cada uma das três parcelas ao seu valor atual, dividindo pelo fator apropriado:

$$A_{\mathrm{C}} = \frac{800}{1+r} + \frac{800}{(1+r)^2} + \frac{800}{(1+r)^3}.$$

Apresentamos, na Tabela 5.2, os resultados para as mesmas três taxas usadas na seção anterior, e verificamos que as comparações são as mesmas para cada uma.

2. No caso do IPVA, as alternativas são:

   A) R\$ 1.358 à vista;

   B) R\$ 1.400 daqui a um mês;

Opção	5%	8%	12%
A)	2.100	2.100	2.100
B)	2.147,62	2.118,52	2.082,14
C)	2.178,60	2.061,68	1.921,47

Tabela 5.2: Valores atuais do Exemplo 1.

C) R$ 467 agora, após um mês e após dois meses.

Seus respectivos valores atuais são, em reais:

A) $A_{\mathrm{A}} = 1.358$;

B) $A_{\mathrm{B}} = \dfrac{1.400}{1+r}$;

C) $A_{\mathrm{C}} = 467 + \dfrac{467}{1+r} + \dfrac{467}{(1+r)^2}$.

As conclusões a que chegamos são as mesmas do método do custo total: a taxas pequenas, "A" é mais barata que "B"; a relação se inverte a taxas maiores; ademais, "C" é sempre um pouco mais cara que "B" porque

$$A_{\mathrm{C}} = \frac{467(1+r)^2 + 467(1+r) + 467}{(1+r)^2} \geqslant \frac{467(3+3r)}{(1+r)^2} > A_{\mathrm{B}}.$$

Aliás, lembre que os montantes na seção anterior foram calculados para o mesmo instante futuro (daqui a dois meses), de modo que essas desigualdades se reescrevem como

$$A_{\mathrm{C}} = \frac{M_{\mathrm{C}}}{(1+r)^2} > \frac{M_{\mathrm{B}}}{(1+r)^2} = A_{\mathrm{B}}.$$

3. Finalmente, olhamos o caso do IPTU:

A) R\$ 2.280 à vista, isto é, $A_{\mathrm{A}} = 2.280$;

B) 12 parcelas de R\$ 200, com a primeira à vista, o que dá

$$A_{\mathrm{B}} = 200 + \frac{200}{1+r} + \ldots + \frac{200}{(1+r)^{10}} + \frac{200}{(1+r)^{11}}.$$

Essa é uma progressão geométrica de termo inicial 200, constante $(1+r)^{-1}$ e 12 termos, de modo que

$$A_{\mathrm{B}} = 200 \cdot \frac{(1+r)^{-12} - 1}{(1+r)^{-1} - 1}.$$

Multiplicando ambos numerador e denominador por $-(1+r)^{12}$, obtemos

$$A_{\mathrm{B}} = 200 \cdot \frac{(1+r)^{12} - 1}{(1+r)^{12} - (1+r)^{11}},$$

observando que ambos os fatores ficam positivos.

Outra possibilidade é multiplicar por $-(1+r)$ "em cima e em baixo", donde

$$A_{\mathrm{B}} = 200(1+r) \cdot \frac{1 - (1+r)^{-12}}{r}.$$

Se não houvesse pagamento no instante inicial e sim após 12 meses, verifique que a expressão seria um pouco diferente:

$$A'_{\mathrm{B}} = 200 \cdot \frac{1 - (1+r)^{-12}}{r},$$

afinal, $A'_{\mathrm{B}} = A_{\mathrm{B}}/(1+r)$ porque todos os pagamentos seriam atrasados um mês. Teremos ocasião de trabalhar com ela já em um exercício e no próximo capítulo.

Exercícios

Na Ferramenta Exercícios, propomos algumas situações para que você determine a melhor opção em cada uma delas, utilizando o método do valor atual. Vale a pena tentar!

1. Determine a melhor opção, do ponto de vista do comprador, assumindo que a taxa de juros é 3% ao mês.

   A) Cheques de R$ 600 para 30 e 60 dias.

   B) Cheque à vista de R$ 1.200.

   C) Cheques de R$ 600 à vista e para 30 dias.

   D) Cheques de R$ 400 para 30, 60 e 90 dias.

2. Uma loja oferece três opções para a aquisição de um certo bem:

   A) Pagamento à vista de R$ 3.000.

   B) Dez parcelas mensais de R$ 350, com a primeira prestação daqui a 30 dias.

   C) Três parcelas mensais de R$ 1.100, com o mesmo vencimento.

   D) Pagamento de R$ 2.000 agora e R$ 1.200 em 60 dias.

   Qual é a melhor opção para o cliente, também a uma taxa de avaliação de 3% a.m.?

3. Determine a alternativa correta utilizando o método do valor atual, assumindo o ponto de vista do consumidor:

   A) Se um preço à vista oferece desconto em relação à soma simples das parcelas, então comprar à vista é mais vantajoso.

   B) Se a soma simples das parcelas é igual ao preço à vista e a taxa de juros vigente é positiva, então comprar à vista é menos vantajoso.

   C) Quanto mais longo o prazo, ou seja, maior o número de parcelas de um pagamento, mais vantajosa será a aquisição.

   D) Com taxa de juros de 3% ao mês, pagar R$ 2.000 à vista é menos vantajoso que pagar R$ 1.030 em cada prestação, uma agora, outra em 30 dias.

5.3 Método da taxa de retorno

Nas seções anteriores, para comparar várias propostas, assumimos conhecida uma taxa de juros padronizada, sob a qual todos os capitais deveriam ser equivalentes.

> *Aqui, imporemos abstratamente que todas as opções têm o mesmo valor atual e verificaremos o quanto de juros cada alternativa envolve, ou seja, determinaremos sua* TAXA DE RETORNO, *para então escolhermos a melhor taxa proposta.*

"Retorno", portanto, é entendido em termos de "renda" para o credor e "custo" para o devedor.

O cálculo da taxa de retorno frequentemente se reduz ao da raiz de um polinômio, motivando de modo exemplar a teoria algébrica competente. (Lembre que já calculamos $\sqrt[n]{M/C}$, o que é encontrar a raiz do polinômio $Cx^n - M$.) Por isso, inverteremos a ordem de nossos exemplos e começaremos pelo caso do IPVA:

2. As três alternativas são:

   A) R$ 1.358 à vista;

   B) R$ 1.400 daqui a um mês;

   C) R$ 467 agora, após um mês e após dois meses.

Impomos que as três alternativas têm o mesmo valor atual $A = 1.358$ em reais, ou seja, o mesmo capital disponível agora deverá ser capaz de honrar as três escolhas. Para isso ser possível, cada opção envolve uma taxa de juros diferente.

Vamos calculá-las:

A) O pagamento à vista já é idêntico ao seu valor atual e não envolve uma taxa de juros. Convencionamos que $r_{\mathrm{A}} = 0\%$.

B) Na seção anterior, determinamos uma expressão para o valor atual em termos da taxa de juros, que podemos usar agora:

$$A = \frac{1.400}{1 + r_{\mathrm{B}}}.$$

Substituindo $A = 1.358$ e isolando r_{B}, obtemos $r_{\mathrm{B}} \approx 3{,}1\%$.

C) Também obtivemos

$$A = 467 + \frac{467}{1 + r_{\mathrm{C}}} + \frac{467}{(1 + r_{\mathrm{C}})^2}.$$

Ao substituirmos $A = 1.358$, multiplicarmos toda a equação por $(1+r_{\mathrm{C}})^2$ e agruparmos todos os termos no membro esquerdo, resta a equação

$$891(1 + r_{\mathrm{C}})^2 - 467(1 + r_{\mathrm{C}}) - 467 = 0.$$

Podemos conhecer suas raízes pelo método de Bhaskara!

- A primeira raiz $1{,}0326\ldots$ dá $r_{\mathrm{C}} \approx 3{,}2\%$. (Lembre que a incógnita é $1 + r_{\mathrm{C}}$ e subtraia 1; o arredondamento daria 3,3%, mas confira que substituir 3,2% é melhor.)

- A segunda raiz é negativa e resultaria em uma taxa menor que -100%, o que deve ser descartado porque o total dos pagamentos é maior que o valor atual.

Portanto, o pagamento à vista é o que sai mais barato para taxas de avaliação (ou de mercado) bem pequenas. Quando a taxa de avaliação é mais alta e supera a taxa de retorno do parcelamento, este fica mais interessante.

Para os demais problemas, recorreremos aos sítios de buscas na Internet que oferecem funcionalidades extras: no caso, fazer o gráfico de um polinômio. Veja os comentários ao final desta seção para um procedimento alternativo com planilhas digitais.

1. Também temos três alternativas e os respectivos cálculos dos valores atuais:

   A) R$ 2.100 à vista, para a qual convencionamos $r_{\mathrm{A}} = 0\%$.

   B) R$ 1.100 agora e R$ 1.100 após um mês, o que resulta em

   $$A = 1.100 + \frac{1.100}{1 + r_{\mathrm{B}}}.$$

   Após substituirmos $A = 2.100$ e multiplicarmos por $1 + r_{\mathrm{B}}$, podemos isolar $r_{\mathrm{B}} = 10\%$.

   C) R$ 800 após um mês, R$ 800 após dois meses e R$ 800 após três meses, isto é,

   $$A = \frac{800}{1 + r_{\mathrm{C}}} + \frac{800}{(1 + r_{\mathrm{C}})^2} + \frac{800}{(1 + r_{\mathrm{C}})^3}.$$

   Multiplicando por $(1 + r_{\mathrm{C}})^3$ e simplificando, devemos resolver

   $$21(1 + r_{\mathrm{C}})^3 - 8(1 + r_{\mathrm{C}})^2 - 8(1 + r_{\mathrm{C}}) - 8 = 0.$$

   Em um sítio de buscas que oferecer gráficos, procure por:

```
plot 21x^3-8x^2-8x-8
```

Use o *zoom* repetidamente para ver que o gráfico intercepta o eixo das abscissas entre 1,0698 e 1,0699. Logo, $r_{\mathrm{C}} \approx 7\%$.

Nós obtivéramos respostas diferentes conforme a taxa de avaliação era 5%, 8% ou 12%. De fato, no primeiro caso (5%), como não obteremos um retorno maior, a melhor alternativa é “A”. Nos demais (8% e 12%), como poderemos obter um adicional acima da taxa de retorno, “C” torna-se a melhor opção.

3. As duas opções e as expressões de seus valores atuais são:

   A) R$ 2.280 à vista, com $r_{\mathrm{A}} = 0\%$.

B) 12 parcelas de R$ 200, começando imediatamente, com

$$A = 200 \cdot \frac{(1 + r_\mathrm{B})^{12} - 1}{(1 + r_\mathrm{B})^{12} - (1 + r_\mathrm{B})^{11}}$$

que se simplifica, após multiplicação pelo denominador, a

$$52(1 + r_\mathrm{B})^{12} - 57(1 + r_\mathrm{B})^{11} + 5 = 0.$$

Procure, no sítio de buscas, por

```
plot 52x^12-57x^11+5
```

e veja, com *zoom,* haver uma raiz por volta de 1,0095, dando $r_\mathrm{B} \approx 1\%$. A raiz 1 (correspondente à taxa de 0% e fácil de ver na equação) é uma solução falsa, porque é uma raiz do denominador $x^{12} - x^{11}$ na expressão original. De fato, dividindo o polinômio por $x - 1$, obtemos

$$52x^{11} - 5x^{10} - \ldots - 5x - 5$$

que, igualado a 0, vem da soma original das parcelas.

A resolução em uma planilha digital:

No próximo capítulo, conheceremos séries de pagamentos mais complexas. Entretanto, nosso conjunto de exemplos já sugeriu que podemos ter arranjos peculiares com várias prestações, nem todas com mesmo valor, trazendo equações polinomiais gerais e de grau mais alto para resolvermos.

Após compreendermos a Matemática envolvida, é perfeitamente cabível recorrer à Informática. As planilhas digitais modernas oferecem a Ferramenta Atingir Meta (*Goal Seek* em inglês), que facilita a busca de uma raiz.

Exemplificaremos seu uso com a alternativa "C" do Exemplo 1, do reparo hidráulico, que requer a determinação de r que satisfaça

$$2.100 = \frac{800}{1 + r} + \frac{800}{(1 + r)^2} + \frac{800}{(1 + r)^3}.$$

Nós resolveremos esse problema diretamente, porque a ferramenta assim o permite, então o mesmo procedimento pode ser aplicado a um polinômio!

Em um programa de planilhas, cada CÉLULA *contém um número ou outra informação de interesse. As células são referenciadas por sua posição em linhas e colunas, como as entradas de uma matriz.*

Sugestão: após digitar um valor, a tecla de tabulação fecha a célula e move para a direita, enquanto a tecla *enter* fecha e move para baixo. As teclas das setas também podem funcionar.

Experimente:

1. Em cada uma das células de A1 a D1, insira a parcela paga em cada período, a partir do momento inicial. No nosso exemplo, será `0` em A1 e `800` em B1, C1, D1. Sempre é interessante anotar, com algum texto nas células abaixo (linha 2), ao que cada uma se refere.

2. Use a célula A3, por exemplo, para armazenar a taxa de retorno. O programa requer que se insira algum valor prévio, como `0`.

3. Na célula E3, insira a função que deve ser igualada ao valor atual, assim:

   ```
   =A1+B1/(1+A3)+C1/(1+A3)^2+D1/(1+A3)^3
   ```

   (Não se esqueça do sinal `=`, que simboliza a definição de uma função.) Por ora, ao dar *enter,* deve aparecer 2400, que é o resultado da função calculada na taxa em A3.

4. Agora, precisamos acessar a Ferramenta ATINGIR META. Seu "caminho" varia conforme o programa: em uma versão, encontramo-la no menu *Dados,* ícone de *Teste de Hipóteses.* O último clique abrirá a janela de diálogo da ferramenta.

5. A janela é um pequeno formulário com três campos: a célula que queremos "definir" é E3, na qual colocamos a função; o valor desejado é 2100 e a célula que será "alternada" é A3, da taxa de retorno. Depois de inserirmos essas informações, podemos clicar em "OK".

6. O processamento acontece. Rapidamente, obtemos uma nova janela com informações do valor pretendido e outro efetivamente atingido, muito próximo. Na planilha em si, a célula A3 contém agora uma aproximação da solução (em uma versão, obtemos 0,069857) e a célula E3 mostra o valor correspondente (talvez arredondado) da função, cuja fórmula ainda está lá.

Para maior prática, tente resolver estas questões:

- Quais são os valores nas células de A1 a D1 para calcular a taxa de retorno da alternativa "B"?
- Modifique o procedimento para inserir o valor atual na célula F1: quais serão a função em E3 e o valor desejado no diálogo da ferramenta?
- Trabalhe também os Exemplos 2 e 3.

Note que podemos resolver, assim, qualquer equação que tenhamos explicitado abstratamente, mesmo que contenha outros termos (trigonométricos, exponenciais etc.). Podemos inserir os coeficientes tanto em células como explicitamente na expressão da função a resolver.

Comentários adicionais:

Somente fomos capazes de fixar A porque o pagamento à vista era uma opção (a saber, a primeira). Em outras situações, temos duas possibilidades: procedemos com uma estimativa ou comparamos pares de alternativas. Por exemplo, se temos $A = P(r)$ em uma opção e $A = Q(r)$ em outra, assumimos que a taxa r é a mesma em ambas, resolvemos $P(r) = Q(r)$ e, a partir de tal r, encontramos A. Note que, ao fazer isso, tornamos as duas opções equivalentes entre si e a A tomado como valor à vista.

Por fim, se o total a pagar é *menor* que o valor atual, o que *não* vimos nos exemplos, então a taxa de retorno correspondente é negativa. Portanto, essa opção sai mais barata que aquelas que têm taxa positiva ou nula.

Exercícios

Novamente, na Ferramenta Exercícios, propomos situações para que você determine a melhor opção em cada uma delas, agora determinando taxas de retorno. Vamos lá?

1. Use o método da taxa de retorno para determinar a melhor opção, do ponto de vista do comprador.

   a) Cheques de R$ 1.800 para 30 e 60 dias.
   b) Cheques de R$ 1.200 para 30, 60 e 90 dias.
   c) Cheques de R$ 1.800 à vista e para 30 dias.
   d) Cheque à vista de R$ 3.000.

2. Assinale a alternativa correta quanto ao método da taxa de retorno:

   a) Esse método pode ser utilizado somente no caso de investimentos, porque se procura saber qual o investimento com melhor lucratividade.
   b) A "taxa de retorno" é uma taxa uniforme para todas as opções em estudo.
   c) Esse método não requer informação prévia sobre a taxa de juros a ser utilizada.
   d) Esse método não pode ser usado quando uma opção é pagamento à vista.

6

Séries de pagamentos e rendas

Este capítulo e o próximo, sobre planos de financiamento, continuam a análise de situações em que várias parcelas ou prestações são operadas. Até aqui, temos estudado cada um desses casos como se apresenta, mas agora construiremos um corpo mais geral de conhecimento.

6.1 O cotidiano

Você já fez uma rolagem de dívida ou uma operação de crédito? Talvez você esteja pagando, ou pense pagar, uma quantia mensal para um plano de previdência privada? Ou, já na melhor idade, você esteja recebendo uma renda como uma pensão ou aposentadoria?

O que essas situações têm em comum?

Em todas, uma certa quantia de dinheiro é transferida periodicamente, enquanto um montante é atualizado em cada período contando tanto os juros como também os depósitos e os saques. Como vimos antes (Seção 1.3), todo investimento é uma dívida e vice-versa, dependendo da perspectiva de quem recebe e quem paga.

Agora, suponhamos ter uma dívida inicial C com taxa de juros r

por mês e também existir um investimento que paga os mesmos juros r por mês, sem incidência de impostos. (Tal concordância dificilmente surge na vida real, mas é apenas um exemplo.) Quais raciocínios podemos fazer?

1. Digamos que depositemos C nesse investimento, negligenciando a dívida. Após n meses, como sabemos, tanto a dívida quanto o montante do investimento serão $C(1+r)^n$.

2. Se imediatamente pagarmos P da dívida, o restante $C-P$, após um mês, subirá a $(C-P)(1+r)$. (Assumimos $P<C$ para que a dívida continue existindo.)

   - Contudo, se investirmos esse P e deixarmos a dívida acumular, após um mês ela crescerá a $C(1+r)$ e o montante do investimento será $P(1+r)$.
   - Ao sacarmos o investimento e pagarmos parte da dívida, restará
   $$C(1+r)-P(1+r)$$
   como dívida, que é o mesmo $(C-P)(1+r)$.

3. Suponhamos que, por dois meses, paguemos P para a dívida. (Assumimos $P \ll C$.)

   - No fim do primeiro mês, a dívida tornou-se $(C-P)(1+r)$, como vimos. Pagando mais P nesse momento, ao fim do segundo mês a dívida será
   $$\big[(C-P)(1+r)-P\big](1+r),$$
   ou seja,
   $$C(1+r)^2-P\big[(1+r)+(1+r)^2\big].$$
   - Contudo, se durante os dois meses investirmos uma vez P e depois novamente P, deixando a dívida acumular, ao fim do segundo mês ela será $C(1+r)^2$, enquanto o montante investido será
   $$P(1+r)^2+P(1+r);$$
   sacando-o para pagar a dívida deixará o mesmo saldo devedor!

O que observamos?

> *Rolar uma dívida fazendo pagamentos parciais e depositar periodicamente em um investimento diferem apenas pela perspectiva, além da possível incidência de impostos. Em ambas as situações, o montante é atualizado com os juros e o depósito ou saque do período.*

Discussão

Participe num fórum trocando ideias sobre essa conclusão! A discussão *Situações cotidianas de pagamentos e rendas* estará disponível na Ferramenta FÓRUNS.

Vale a pena saber, para a discussão, o que faremos nas próximas aulas:

- Listaremos diversos *tipos de séries* de pagamentos, com diversas variações entre valor dos pagamentos, duração, . . .
- Veremos *como formalizar* cada situação em termos matemáticos. Será mais importante verificar que isso sempre pode ser feito, em vez de deduzir uma fórmula fechada para cada caso.
- Aplicaremos conhecimento matemático *para computarmos variáveis de interesse:* montante, principal, prestações etc.

Levando em conta isso e também sua lida cotidiana com pagamentos ou rendas (para melhor ou para pior), o que você já sabe, acha importante aprender, ou acabou de perceber sobre essas séries? Compartilhe conosco no fórum!

6.2 Diversidade e formalização

São infindáveis os modos como uma série de pagamentos pode ser feita. Para termos uma ideia de tudo que pode ser variado, classificaremos as séries em diversas famílias. Porém, os casos são tantos que será melhor saber como determinar o cálculo para uma situação dada do que querer uma fórmula pronta para cada um. Discutiremos também essa formalização.

Assumiremos sempre que a taxa de juros é indicada com respeito ao período entre pagamentos, sendo previamente ajustada para seu valor efetivo, e que tal período tem sempre a mesma duração.

1. Quanto ao valor das parcelas ou pagamentos, as séries podem ser *constantes* (*uniformes*), caso em que cada pagamento tem um mesmo valor P, ou *variáveis,* casos em que as parcelas seguem uma progressão aritmética ou geométrica, ou outra lei de formação, ou ainda são *aleatórias.*

2. Cada pagamento feito corresponderá a um período. Quando é sempre feito no início do período, a série é chamada *antecipada.* Quando é feito no fim do período, a série é *vencida.* A distinção é relevante em vista dos juros incidentes ao longo do período.

3. Pode também haver um *prazo de diferimento* entre o início (quando da assinatura de um contrato, por exemplo) e o primeiro pagamento. Nesse caso, a série é *diferida,* havendo ou não *carência sem juros,* ao contrário do caso *imediato.*

4. Se o prazo consiste de um número finito de períodos, ou seja, é limitado, diz-se que a série é *temporária ou finita.* Contudo, o prazo pode consistir de um número muito grande de períodos ou, ainda, ser ilimitado, quando se diz que a série é *perpétua ou infinita.*

Para formalizar isso matematicamente, é importante introduzir notação:

- A taxa será sempre r.
- Digamos que o valor P_t é o t-ésimo pagamento a ser feito, para o índice t de 1 a N.
- Digamos que o prazo de diferimento seja de m períodos.

- O início da série e do primeiro período ocorrerá no instante 0.

Assim, o montante da série será obtido no término do $(m + N)$-ésimo período. Se a série for vencida, o pagamento P_t será feito no fim do $(m + t)$-ésimo período; se for imediata, tal pagamento será no fim do $(m + t - 1)$-ésimo período.

Vejamos o que acontece em cada caso mencionado acima:

1. Se a série for uniforme, cada $P_t = P$; se as parcelas seguem uma progressão aritmética, cada $P_t = X + Yt$ (o que acontece no plano SAC — Seção 7.2); se a progressão é geométrica, cada $P_t = X \times Y^t$ (o que será útil para incorporar a inflação — próxima seção, terceira série). Outra lei de formação pode ser usada para determinar cada P_t, mas em uma série aleatória deveremos obter os valores separadamente e lidar com cada P_t sem simplificação.

2. Na série antecipada, os juros acumulados ao pagamento P_t serão $P_t(1+r)^{N-t+1}$. Na série vencida, serão $P_t(1+r)^{N-t}$, de modo que o último pagamento não gera juros.

3. A série temporária corresponde à formalização acima para um número inteiro N. Quando a série é perpétua, estudaremos o limite conforme $N \to \infty$.

Assumimos que o valor inicial da série é zero, isto é, nenhum capital foi investido inicialmente e os únicos depósitos são as parcelas $P_1, \ldots, P_N$. Isso reflete literalmente a formação de uma poupança a partir do nada. No caso de uma rolagem de dívida, que realmente tem um valor inicial com sinal trocado, o que estamos contando é o montante de todos os pagamentos efetuados independentemente desse início.

Enfim, o montante da série será

$$M = \sum_{t=1}^{N} P_t(1 + r)^{N-t+\delta}.$$

Determinar explicitamente esse montante em vários casos, assim como outras informações de interesse, será o tópico da próxima seção.

Séries perpétuas existem?

Essa pergunta é natural e a resposta é que sim. Por exemplo, quando se trata de um capital disponível para garantir a aposentadoria de um cidadão, qual o máximo valor da pensão mensal que o cidadão deverá receber contanto que esse capital não se extingua? Ou seja, queremos determinar o pagamento de uma série uniforme de modo que o valor atual da série possa ser bancado por esse capital. Buscamos uma tabela biométrica para determinar o quanto esse cidadão viverá, digamos, mais 30 anos, sendo 12 meses em um ano. Isso resultará em $N = 360$, que é um número muito grande em termos das exponenciações envolvidas. Por simplicidade, podemos adotar $N \to \infty$, mesmo caso de um fundo a ser garantido eternamente, por exemplo, para a concessão de um prêmio anual (como é o Nobel) ou de uma renda a toda a descendência.

Exercícios

Como cada tipo de série influi no resultado final? Estamos craques em reconhecê-los? Pratique as novas definições trabalhando sobre os problemas enunciados na Ferramenta Exercícios.

1. Determine qual alternativa é exemplo de uma série uniforme finita com prestações antecipadas imediatas:

   a) Meu dentista cobrará uma obturação em três cheques iguais para 30, 60 e 90 dias.

   b) Tenho dívida no cheque especial e paguei metade agora, deixando a outra metade acumular para o mês que vem.

   c) Comprei meu televisor em dez prestações sem juros, com a primeira somente depois da próxima Copa!

   d) Pagarei um empreiteiro para reformar meu esgoto, com metade agora, metade no término do serviço.

2. Uma cidadã comprará um carro e acertou o seguinte plano de pagamento com a concessionária: as parcelas terão todas o mesmo

valor, serão mensais e começarão a ser pagas daqui a três meses; não será cobrada parcela no mês de dezembro. O que NÃO é correto afirmar?

A) Porque todas as parcelas têm o mesmo valor, trata-se de uma série uniforme.

B) As parcelas são mensais, mas em um mês não é feita cobrança, de modo que a série é variável.

C) A série pode ser finita ou perpétua, dependendo dos juros e do preço envolvidos.

D) Há um prazo de diferimento, mas não é esclarecido se há carência de juros.

6.3 Alguns cálculos

Recordemos os itens que se pode querer calcular para uma série, conhecidos os demais:

- O montante que será atingido ao fim da série, conhecidos a taxa e o regime de parcelas.
- O valor atual desse montante, ou seja, o quanto deveria ser aplicado agora, como capital, para atingi-lo sob os mesmos juros compostos.
- O valor necessário de cada prestação para cumprir o objetivo.
- O número de prestações necessário para atingir o objetivo. Levando em conta a carência, trata-se do prazo da série.
- A taxa de juros que tornará isso possível.

Para vermo-los na prática, apresentaremos três séries interessantes, dentre todas que podem ser consideradas, para determinar a relação entre as variáveis acima. O mais importante não é memorizar estas equações, mas saber construí-las em outros cenários. Feito isso, é preciso também aplicar regras matemáticas para isolar uma quantidade em termos das outras.

Série uniforme, finita, de parcelas imediatas antecipadas:

De acordo com a seção anterior, os pagamentos começam imediatamente (o primeiro já é feito no instante zero da assinatura do contrato), com valor constante P. Sendo N períodos no total, o t-ésimo pagamento renderá juros compostos por $N-t+1$ períodos e o montante será

$$M = \sum_{t=1}^{N} P(1+r)^{N-t+1}.$$

Começamos a determinar essa soma fatorando P:

$$M = P\sum_{t=1}^{N}(1+r)^{N-t+1}.$$

Agora, fazemos $j = N-t+1$: tal j, como função de t, é uma *bijeção* do conjunto $\{1,\ldots,N\}$ nele mesmo. Isso permite outra identificação dos somandos:

$$\underbrace{(1+r)^N}_{\substack{t=1\\ j=N}} + \underbrace{(1+r)^{N-1}}_{\substack{t=2\\ j=N-1}} + \underbrace{(1+r)^{N-2}}_{\substack{t=3\\ j=N-2}} + \ldots + \underbrace{(1+r)^2}_{\substack{t=N-1\\ j=2}} + \underbrace{(1+r)^1}_{\substack{t=N\\ j=1}},$$

logo, podemos somar sobre j de trás para frente:

$$M = P\sum_{j=1}^{N}(1+r)^j.$$

Essa é a soma de uma progressão geométrica com termo inicial $1+r$, constante também $1+r$ e N termos; note bem, as potências da constante vão de 0 a $N-1$ porque descontamos o termo inicial. Portanto,

$$M = P\cdot(1+r)\cdot\frac{(1+r)^N-1}{(1+r)-1} = P(1+r)\frac{(1+r)^N-1}{r}.$$

Nessa última expressão, podemos obter um dentre M, P, r, N a partir dos demais, apesar de isolar r requerer a solução de uma equação polinomial.

Qual é o valor atual desse montante? Indicando-o pela letra A, o capital totalizaria $A(1+r)^N$ ao fim dos N períodos, se investido à mesma taxa, e deveria, por hipótese, ser idêntico ao montante M. Então

$$A = \frac{M}{(1+r)^N} = P \cdot \frac{(1+r)}{r}\big[1-(1+r)^{-N}\big].$$

Por exemplo, suponhamos que desejamos ter um milhão de reais no banco daqui a trinta anos, a título de aposentadoria. Para isso, todo mês depositaremos o valor P em uma poupança que rende 0,2% ao mês, começando imediatamente.

- Quanto é P? Nesse caso, $M =$ R\$ 1.000.000, $N = 360$ e $r = 0{,}002$, de modo que $P =$ R\$ 1.895,62.
- O total pago nominalmente será $NP =$ R\$ 682.423, 20.
- Para obter o mesmo milhão depositando uma única vez e esperando os trinta anos, temos que desembolsar $A =$ R\$ 487.102,38.

Série uniforme, infinita, de parcelas imediatas vencidas:

Neste caso, os pagamentos começam ao fim do primeiro período. Eles têm o mesmo valor P, a título de uma pensão perpétua (sem correção para a inflação, porém). Não se pode calcular o montante dessa série porque os pagamentos nunca acabam: como as parcelas não decrescem e assumindo que a taxa de juros é positiva, o acumulado até um período arbitrário crescerá indefinidamente, isto é, o "montante" ou somatória total será infinito. (Se cada parcela decrescesse geometricamente, porém, o acumulado aproximar-se-ia mais e mais de um valor limite.)

O que podemos calcular é o valor atual dessa série, ou seja, o menor capital inicial A que gera esses pagamentos periódicos, enquanto rende juros, e nunca se exaure. Para obtermos o pagamento P ao fim do t-ésimo período, é preciso deixar $P(1+r)^{-t}$ reservado no instante zero — de fato, esse capitalzinho, acrescido de juros compostos durante t períodos, resultará em P. Então somamos todas essas "contas virtuais”:

$$A = \sum_{t=1}^{\infty} P(1+r)^{-t} = P \cdot \frac{(1+r)^{-1}}{1-(1+r)^{-1}} = \frac{P}{r}.$$

Aqui, utilizamos a soma infinita de uma progressão geométrica com termo inicial e constante ambos iguais a $1/(1+r)$.

Por exemplo, quanto devemos investir em uma poupança que renda 0,2% ao mês para sacarmos R$ 5.000 todo mês, começando um mês depois? Com $P =$ R$ 5.000 e $r = 0{,}002$, obtemos $A =$ R$ 2.500.000. Após um mês, os juros serão precisamente R$ 5.000; sacando-os então, preservaremos a base de R$ 2,5 milhões, de modo que todo o processo se reinicia.

Série geométrica, infinita, de parcelas imediatas vencidas:

Podemos considerar que o arranjo apresentado acima, para nossa pensão perpétua, é extremamente insatisfatório porque não conta com a inflação em cada período. Digamos que, no exemplo apresentado, todo mês queiramos sacar uma quantia com o mesmo poder de compra que $X =$ R$ 5.000 tem hoje.

Para determinar essa quantia, devemos estimar a inflação daqui até o momento de tal saque. Isso é muito difícil, mas, a fim de fazermos alguns cálculos, suponhamos que a inflação seja de uma taxa f por período, constante.

Então, o t-ésimo pagamento será $P_t = X(1+f)^t$; o primeiro pagamento já será $X(1+f)$ e estará corrigido. Como antes, não se fala em montante, mas o valor atual é dado por:

$$\begin{aligned} A = \sum_{t=1}^{\infty} P_t(1+r)^{-t} &= X\sum_{t=1}^{\infty}(1+f)^t(1+r)^{-t} \\ &= X\sum_{t=1}^{\infty}\Big(\frac{1+f}{1+r}\Big)^t = X\cdot\frac{\big(\frac{1+f}{1+r}\big)}{1-\big(\frac{1+f}{1+r}\big)} = X\cdot\frac{1+f}{r-f} \end{aligned}$$

ou, em termos dos juros reais r^*, usamos a identidade $(1+r^*)(1+f) = (1+r)$ para obter

$$A = X \cdot \frac{(1+r^*)^{-1}}{1-(1+r^*)^{-1}} = \frac{X}{r^*}.$$

No exemplo anterior, digamos que a inflação mensal seja 0,15% também ao mês. Agora $X =$ R\$ 5.000, $r = 0{,}002$ e $f = 0{,}0015$, donde $A =$ R\$ 10.015.000. Realmente, em vista da inflação, a dotação para essa pensão deverá ser bem maior!

Notação

A título de informação, observamos que certos fatores aparecem repetidamente no estudo de séries de pagamentos, como já podemos ter suspeitado acima, e têm notação especial em muitos textos e em discussões técnicas. Convém conhecermos essa notação, mas não a utilizaremos em nosso curso.

Fixada uma taxa r, definem-se:

- o fator de acumulação de capital de uma parcela, $a^n = (1+r)^n$;
- o fator de valor atual de uma parcela, $v^n = (1+r)^{-n}$;
- o fator de acumulação de capital de uma série uniforme vencida,

$$a_{\overline{N}|} = \frac{(1+r)^N - 1}{r};$$

- o fator de valor atual de uma série uniforme vencida,

$$v_{\overline{N}|} = \frac{1-(1+r)^{-N}}{r}.$$

Exercícios

Estamos longe de ter determinado fórmulas para todas as possíveis séries. Na Ferramenta EXERCÍCIOS, você encontra propostas de outras situações, em que não valem as fórmulas acima, mas a que se aplicam os mesmos raciocínios. Experimente!

1. Assinale o raciocínio correto sobre cálculos de séries:

   A) Uma série perpétua de parcelas iguais deve ter valor atual infinito, para que as parcelas não exauram o capital inicial.

   B) Sendo outros fatores idênticos, são iguais os valores atuais das séries uniformes finitas de parcelas antecipadas e vencidas.

   C) Sendo outros fatores idênticos, o montante de uma série uniforme finita de parcelas antecipadas é capitalizado por um período em relação ao da série de parcelas vencidas.

   D) Para ajustar o valor atual de uma série considerando-se a inflação, basta substituir a taxa de juros por sua diferença com a taxa da inflação.

2. Começando imediatamente, investem-se R$ 300 em uma conta que rende 2% ao mês. A cada mês, por dificuldades financeiras, consegue-se depositar R$ 10 menos que no mês anterior. Após 30 meses, o investimento é encerrado. Quais são o montante (ao fim dos 30 meses) e o valor atual dessa série, respectivamente?

   A) R$ 8.151,13 e R$ 4.500,00.

   B) R$ 12.384,10 e R$ 6.836,93.

   C) R$ 7.024,11 e R$ 3.877,81.

   D) R$ 7.375,98 e R$ 4.134,26.

   Sugestões: Para calcular o montante, some os 31 termos pacientemente, utilize uma planilha digital (como praticaremos no próximo capítulo), recorra a algum sítio na Internet para representar a série simbolicamente, ou recorra à fórmula na pág. 94.

Atividade

Como podemos estudar e explicar melhor as séries de pagamento?

Conheça a Calculadora do Cidadão, no sítio do Banco Central do Brasil, e explore as várias modalidades de prestação fixa e como calcular um parâmetro a partir de outros, verificando o que é possível fazer ou quais séries tratar com essa ferramenta.

Apresente suas descobertas e comparações com os cálculos que fizemos na discussão *Calculando séries* da Ferramenta FÓRUNS. Reflita e pergunte sobre os comentários dos demais colegas.

7

Financiamentos e amortizações

Veremos, na Seção 7.1, que operações de crédito (como consignados) e financiamentos (como de imóveis e automóveis) são distintos da rolagem de dívidas. Conheceremos os planos SAC e Price de financiamentos, mais usados no Brasil, na Seção 7.2. Outros detalhes da implementação brasileira, veremos na Seção 7.3, e faremos cálculos e comparações concretos na Seção 7.4.

7.1 A filosofia

Vimos no Capítulo 6 como funciona o abatimento de uma dívida (ou o investimento em uma poupança) com pagamentos periódicos:

> *Em séries de pagamentos, o saldo remanescente após uma parcela continuará a acumular-se sob juros compostos.*

Podemos separar o pagamento do capital original, chamado *principal,* e o dos juros: basta subtrair o valor inicial do montante final. Mas, ao fazermos um pagamento, não se especifica o que pagamos (dívida ou juros), apenas se abate do total acumulado.

Nos sistemas de financiamento que estudaremos agora, ficam explícitas as partes do pagamento referente ao abatimento do principal da dívida e aos juros:

> *Os planos de financiamento diferem das séries de pagamento e entre si na especificação de* COMO O PRINCIPAL E OS JUROS SÃO PAGOS, *além de prazos e carências. São mantidos dois cálculos separados: o das amortizações e o dos juros.*

Isso faz diferença quando pretendemos quitar o financiamento com um recebimento futuro, por exemplo, obtido com a venda de outro bem:

a) As parcelas pagas até então podem ter privilegiado os juros. Assim, grande parte do capital ainda precisa ser honrada.

b) O principal pode ter sido privilegiado, restando menos a quitar.

> *Ademais, subsistem impedimentos culturais e legais à cobrança de juros sobre juros, o chamado* ANATOCISMO. *Portanto, os planos de financiamento devem prever, a cada período, o pagamento integral dos juros sobre o saldo devedor, caindo no regime de juros simples.*

Organização de um financiamento

A dívida a ser amortizada refere-se a um valor atual, com o qual começamos a lidar na Seção 5.2. Por exemplo, se queremos financiar cem mil reais, esse é o valor inicial de nossa dívida (antes de quaisquer juros), e deve ser o valor atual do financiamento já que, se tivéssemos esse mesmo valor na mão, não faríamos o tal financiamento. Como antes, indicamos essa quantidade pela letra A, mas poderíamos ainda utilizar o nosso C original.

A dívida também tem um prazo para ser paga, digamos de N períodos, com taxa de juros r em cada período.

Chamando P_t ao pagamento no término do t-ésimo período e M ao montante, usamos nossa conclusão da Seção 6.2:

$$\sum_{t=1}^{N} P_t(1+r)^{N-t} = M = A(1+r)^N.$$

Introduzimos também o *saldo devedor* S_t, que é o restante a quitar *logo após* o pagamento de P_t:

- No início do financiamento, temos $S_0 = A$, embora não haja P_0.
- Ao final do plano, com a quitação, $S_N = 0$.

Por fim, indicamos os juros acumulados no período entre os instantes $t-1$ e t como J_t, de modo que se forma a seguinte *identidade fundamental:*

$$S_{t-1} + J_t = P_t + S_t.$$

Em outras palavras: entre $t-1$ e t, o saldo devedor S_{t-1} acumulou juros J_t e, em t, parte do total será pago por P_t, parte sobrará como S_t. Além disso, por definição, $J_t = rS_{t-1}$, donde

$$S_t = S_{t-1}(1+r) - P_t.$$

Para que os juros sejam simples, não devem acumular-se e precisamos $P_t \geqslant J_t$. A partir da identidade acima, para que o saldo devedor diminua a cada período, precisamos também $P_t > J_t$. Desse modo, a diferença $P_t - J_t$ é a *amortização* (do capital) feita no t-ésimo período.

Com essas definições, temos os seguintes totais nominais, que não têm sentido financeiro porque agrupam valores em instantes distintos e não atualizados pela taxa r, mas são importante referência no cotidiano:

- O total pago é $\sum_{t=1}^{N} P_t$, diferente do montante M.
- O total de juros pagos é $\sum_{t=1}^{N} J_t$.
- O total amortizado é $\sum_{t=1}^{N}(P_t - J_t)$ e este, sim, deve ser A.

De fato, a partir da identidade acima, temos

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{N}(P_t - J_t) &= \sum_{t=1}^{N}(S_{t-1} - S_t)\\ &= (S_0 - S_1) + (S_1 - S_2) + \ldots + (S_{N-1} - S_N)\\ &= S_0 - S_N = A.\end{aligned}$$

A soma dos termos $S_{t-1} - S_t$ é chamada *telescópica* porque cada termo tem componentes que se cancelam com o anterior e com o seguinte.

A poupança virtual

Logo no primeiro exemplo da Seção 1.2, reconhecemos o regime de juros simples como um plano de financiamento que satisfaz as condições discutidas no início desta aula: para financiar o principal A, pagamos os juros rA a cada período e, no final, devolvemos A também.

> *Contudo, esse plano necessitará um desembolso descomunal para a quitação, sendo interessante* POUPAR, *a cada período, algum valor com essa finalidade.*

Essa "poupança" está presente em cada plano de financiamento, do modo que veremos agora. Denotando o valor poupado no instante t por Q_t, impomos que a prestação P_t deve consistir desse Q_t e dos juros rA acima:

$$P_t = Q_t + rA.$$

Suponhamos que a poupança remunere à mesma taxa r da dívida. (Na prática, alertamos, isso só acontece dentro do financiamento, cuja taxa é bem mais alta que a dos investimentos disponíveis.) Então, temos como objetivo:

$$\sum_{t=1}^{N} Q_t(1 + r)^{N-t} = A.$$

Para verificar se esse objetivo é atingido, calculamos a mesma soma a partir da substituição de Q_t por $P_t - rA$:

$$\sum_{t=1}^{N} P_t(1+r)^{N-t} - rA\sum_{t=1}^{N}(1+r)^{N-t}.$$

A primeira soma já conhecemos: é o montante M, ou seja, $A(1+r)^N$. A segunda consiste de trazer cada juro rA (constante, então fatorado) ao seu valor no instante $t = N$. É uma progressão geométrica de termo inicial $(1+r)^{N-1}$, constante $(1+r)^{-1}$ e N termos, donde

$$\sum_{t=1}^{N}(1+r)^{N-t} = (1+r)^{N-1}\cdot\frac{(1+r)^{-N}-1}{(1+r)^{-1}-1} = \frac{(1+r)^N-1}{r}.$$

Concluímos que

$$\sum_{t=1}^{N} Q_t(1+r)^{N-t} = A(1+r)^N - rA\cdot\frac{(1+r)^N-1}{r} = A$$

como desejado!

Discussão

Vamos discutir tudo isso num fórum? Acesse a Ferramenta Fóruns e participe na discussão *Situações cotidianas de financiamento — Parte I.*

Tenha em mente, na discussão, os tópicos das próximas aulas:

- Estudaremos na Seção 7.2 os dois planos de financiamento mais comuns no Brasil, o SAC e o Price. Você já pode conhecer algo sobre seus usos em buscas na Internet. Competirá a você, em nosso estudo teórico, prover o embasamento das informações apresentadas!

- É preciso levar em conta todos os detalhes e adicionais impostos pela legislação e pelo mercado brasileiros, como o seguro do financiamento. Também existem outras modalidades pelas quais podemos optar, como o consórcio. (Seção 7.3.)

- Finalmente, veremos como fazer *contas concretas* com isso e determinar os prós e contras de cada alternativa (Seção 7.4.)

Pense em tudo isso e também em sua experiência com financiamentos. O que você já conhece, acha importante conhecer, ou descobriu agora sobre essas operações? Traga para o nosso fórum!

7.2 Os planos SAC e Price

No Brasil, dois planos de amortização são mais comuns: o *sistema linear de amortização, ou de amortização constante* (*SAC*), e o *sistema Price ou francês.* Cada um explicita a composição da parcela periódica para pagar a dívida. Na prática, entram diversos fatores na composição de cada parcela, como conheceremos na próxima seção, e ocorrem variações da formalização. Em nosso estudo, limitar-nos-emos a uma formalização simples.

Plano SAC

Neste plano, cada prestação paga o mesmo valor para abater a dívida original, mais os juros referentes sobre o saldo devedor. Demonstraremos que

$$P_t = A \cdot \frac{1 + r(N - t + 1)}{N} \quad \text{e} \quad S_t = A \cdot \frac{N - t}{N}.$$

Como dividiremos o principal A para amortização igual nas N prestações, em cada uma contribuiremos A/N, de modo que

$$P_t = \frac{A}{N} + J_t = \frac{A}{N} + rS_{t-1}.$$

Agora, ao fim do t-ésimo período, foram pagas $P_1, P_2, \dots, P_t$, ou seja, t amortizações, enquanto não acumularam juros, donde

$$S_t = A - t \cdot \frac{A}{N}.$$

Portanto, calculando-se S_{t-1},

$$P_t = \frac{A}{N} + rA \cdot \frac{N-(t-1)}{N}.$$

Outro modo de organizar os mesmos cálculos é período a período: usando a identidade fundamental, obtemos

$$S_t = S_{t-1} + J_t - P_t = S_{t-1} - \frac{A}{N},$$

que é uma *fórmula recursiva* para o saldo devedor, dando cada saldo em termos do anterior, começando com $S_0 = A$. (Como veremos no exemplo, ela é interessante para gerar sucessivamente as linhas de uma planilha.)

De fato,

$$S_1 = S_0 - \frac{A}{N} = \frac{N-1}{N} \cdot A, \quad S_2 = S_1 - \frac{A}{N} = \frac{N-2}{N} \cdot A, \quad \ldots$$

donde obtemos a mesma *fórmula fechada* $S_t = A(N-t)/N$ e verificamos que o plano realmente se encerra com $S_N = 0$.

Veremos uma dedução por meio da forma linear de P_t na Seção 7.4.

Exemplo em planilha:

Tomaremos $N = 10$, $A = 1.000$ (em reais) e a taxa exagerada de $r = 10\%$ *por período* a fim de realçarmos os valores. A Tabela 7.1 identifica as parcelas, sua composição de juros e amortização e o saldo devedor em cada período. (A primeira linha com juros e amortização iguais reflete a mera coincidência de $1/N$ e r.)

Para construirmos essa tabela, ou planilha, começamos a partir do principal S_0 e, em cada período, calculamos nesta ordem:

1. a amortização $P_t - J_t$, que é o valor constante A/N;

2. os juros J_t, dados por r vezes o saldo devedor anterior S_{t-1};

3. a parcela P_t, soma da amortização e dos juros;

t	P_t	J_t	$P_t - J_t$	S_t
0				1.000
1	200	100	100	900
2	190	90	100	800
3	180	80	100	700
4	170	70	100	600
5	160	60	100	500
6	150	50	100	400
7	140	40	100	300
8	130	30	100	200
9	120	20	100	100
10	110	10	100	0
Total	1.550	550	1.000	

Tabela 7.1: Plano SAC com $A = 1.000$, $N = 10$ e $r = 10\%$.

---

4. o novo saldo devedor S_t, igual ao anterior menos a amortização.

Assim, é perfeitamente possível construir essa planilha manualmente. Contudo, no caso de um prazo maior, não é pecado recorrer a uma planilha digital, o que ilustraremos agora.

> *Em um programa de planilhas, a referência à linha ou coluna de uma célula pode ser* FIXA, *precedida pelo caractere* \$. *Caso contrário, a fórmula é alterada conforme sua posição relativa.*

Vejamos como isso se aplica à construção da planilha do plano SAC com os dados acima. Digamos que reservaremos as linhas 1 e 3 para colocar textos e rótulos, como na Tabela 7.1. Então:

1. Nas células A2, B2 e C2, insira respectivamente `10`, `0,1` (ou `0.1`, dependendo do sistema) e `1000`, que são N, r e A.

2. Em D2, insira `=C2/A2`, que calcula a amortização constante.

3. Em A4, insira `0`. Em E4, insira `=C2`. Esta é a linha correspondendo ao instante $t = 0$ do financiamento, com somente o saldo S_0.

4. Em A5, insira `1` (referente a $t = 1$). Em C5, insira `=$B$2*E4` (que calcula J_1). Em D5, insira `=$D$2` (referente à amortização). Volte a B5 e insira `=C5+D5` (referente a P_1). Por fim, em E5, insira `=E4-D5` que é o saldo atualizado S_1.

5. Selecione as células de A5 a E5, começando por A5, como se fosse um texto em um editor. O retângulo dessas células fica emoldurado, com um pequeno quadrado no canto inferior direito. Clique e segure nesse quadrado, arrastando para baixo.

6. Ao soltar, as linhas seguintes serão automaticamente preenchidas. (Arraste, ou repita, até encontrar o valor desejado de N ou o saldo devedor nulo.) Por exemplo, clique em C11 para inspecionar sua fórmula: é `=$B$2*E10` que faz referência fixa à célula com o valor de r, mas relativa à célula com o saldo S_6.

Deixamos a seu cargo fazer o programa totalizar as diversas colunas, como na tabela!

Tabela Price

Já nesta formulação, cada prestação será constante P. Demonstraremos que

$$P = rA \cdot \frac{(1+r)^N}{(1+r)^N - 1} \quad \text{e} \quad S_t = A\left(1 - \frac{(1+r)^t - 1}{(1+r)^N - 1}\right).$$

Também encontramos, no dia a dia, outra forma para a prestação, com apenas uma potenciação:

$$P = Ar + \frac{Ar}{(1+r)^N - 1}.$$

Ela pode ser obtida da primeira escrevendo-se, naquela, o numerador como $(1+r)^N - 1 + 1$.

Por fatoração, devemos ter:

$$P \sum_{t=1}^{N} (1+r)^{N-t} = A(1+r)^N.$$

Essa é a soma da progressão geométrica que já conhecemos, mas que podemos também somar a partir do fim, com a indexação $j = N - t$, que é uma bijeção $\{1, \ldots, N\} \to \{0, \ldots, N-1\}$:

$$P \sum_{j=0}^{N-1} (1+r)^j = A(1+r)^N$$

com termo inicial 1, constante $1+r$ e N termos. Vem

$$P \cdot \frac{(1+r)^N - 1}{(1+r) - 1} = A(1+r)^N$$

e isolamos P a partir daí.

Quanto ao saldo devedor, podemos deduzir o valor atualizado das prestações já pagas do valor atualizado de todo o principal:

$$S_t = A(1+r)^t - \sum_{j=0}^{t-1} P(1+r)^j = A(1+r)^t - P \cdot \frac{(1+r)^t - 1}{r}.$$

Substituindo P, vem:

$$S_t = A(1+r)^t - A \cdot \frac{(1+r)^N \left[(1+r)^t - 1\right]}{(1+r)^N - 1}.$$

Após tomar o mesmo denominador e, no numerador resultante, fazer a distribuição e simplificação, obtemos

$$S_t = A \cdot \frac{(1+r)^N - (1+r)^t}{(1+r)^N - 1}.$$

Por fim, para chegar à forma do início da subseção, insira $-1+1$ entre os termos do numerador e distribua a divisão pelo denominador a $(1+r)^N - 1$ e $1-(1+r)^t$, com cuidado com o sinal usado lá.

Embora essas fórmulas para P e S_t sejam fechadas, são o bastante para a construção de uma planilha, então pospomos a dedução recursiva e uma análise da aparente composição de juros para a Seção 7.4.

O mesmo exemplo:

Para compararmos com a planilha do plano SAC, repetimos os dados $N = 10$, $A = 1.000$ e $r = 10\%$. A seguir, a Tabela 7.2 identifica as parcelas, juros, amortizações e saldos devedores. (Os valores mostrados são arredondados e pode haver, em função disso, diferenças nos centavos.)

t	P_t	J_t	$P_t - J_t$	S_t
0				1.000
1	162,75	100,00	62,75	937,25
2	162,75	93,73	69,02	868,23
3	162,75	86,82	75,92	792,31
4	162,75	79,23	83,51	708,80
5	162,75	70,88	91,87	616,93
6	162,75	61,69	101,05	515,88
7	162,75	51,59	111,16	404,72
8	162,75	40,47	122,27	282,45
9	162,75	28,25	134,50	147,95
10	162,75	14,80	147,95	0
Total	1627,45	627,45	1.000	

Tabela 7.2: Tabela Price com $A = 1.000$, $N = 10$ e $r = 10\%$.

Analogamente à planilha do plano SAC, a construção período por período começa pelo capital S_0 e calcula em ordem:

1. a parcela P, que é constante com a fórmula dada no início;
2. os juros J_t, novamente rS_{t-1};
3. a amortização $P - J_t$;
4. o novo saldo devedor S_t, subtraindo a amortização de S_{t-1}.

Em um programa de planilhas, procedemos como para o plano SAC. Acompanhe lá os principais significados, mas utilize os seguintes comandos:

1. De A2 a D2, insira `10`, `0,1` (ou `0.1`), `1000` e:

   ```
   =C2*B2+C2*B2/((B2+1)^A2-1)
   ```

   Esta última é a fórmula da prestação constante.
2. Em A4 e E4, insira `0` e `=C2`, respectivamente.
3. De A5 a E5, insira `1`, `=$D$2`, `=$B$2*E4`, `=B5-C5` e `=E4-D5`, respectivamente.
4. Faça o programa preencher a planilha automaticamente.

Exercícios

Temos uma tarefa proposta na Ferramenta Exercícios. Não perca!

1. Queremos financiar R$ 200.000 para comprar um imóvel em dez anos. A taxa de juros do mercado é 15%, nominal ao ano, e as prestações são mensais. Assim:

   A) No plano Price, o valor de cada prestação é R$ 2.581,36.

B) No plano SAC, o valor da primeira prestação é R$ 4.166,67.

C) No plano Price, o montante ultrapassará R$ 900.000.

D) No plano SAC, o montante será inferior a R$ 800.000.

2. Novamente, queremos financiar R$ 200.000 em dez anos e a taxa de juros do mercado é 15%, nominal ao ano. Porém, como temos criança pequena, sabemos que não poderemos bancar uma prestação mensal acima de R$ 3.500 depois dos primeiros três anos, quando começará a idade escolar. Assim:

   A) Não poderemos financiar esse valor, nem pelo plano SAC, nem pelo plano Price.

   B) O plano SAC não é uma opção, porque o valor de sua prestação será superior a esse valor ainda após os primeiros três anos.

   C) O plano Price é a melhor opção, porque o valor da prestação mensal é sempre inferior a esse limite.

   D) Poderemos financiar esse valor, nessas condições, por ambos os planos.

Pesquisa e simulação

Convém perceber o que acontece em cada plano, por causa da diferente formulação da parcela. É o que praticaremos agora.

Procure um sítio bancário que ofereça um simulador para calcular ambos os financiamentos. Escolha quais parâmetros entrar: valor do financiamento, prazo etc. Elabore também suas próprias planilhas com os mesmos dados e confira as prestações e suas composições. Por fim, compare os planos SAC e Price *entre si* usando os resultados da simulação:

- Como o valor das prestações comporta-se em cada período? E o saldo devedor?

- Você pode conceber diferentes perfis para um tomador desse crédito, de modo que cada plano seja mais proveitoso a cada perfil, isto é, cidadãos diferentes optariam por planos diferentes? Por quê?

- Você consegue validar os ditos corriqueiros sobre qual dos planos tem prestação mais alta, mais ou menos juros, é melhor para abatimentos periódicos ou quitação antecipada?

Descreva suas conclusões, juntamente com os parâmetros que você usou na simulação, em uma redação a ser entregue na Ferramenta ESCANINHO.

Preserve os demais dados que obtiver nas simulações, sobre cobranças adicionais pelos agentes financiadores, para a próxima seção!

7.3 Detalhes no Brasil

Uma série de detalhes deve ser considerada nos cálculos a respeito dos planos de financiamento. Além das questões negociais ou promocionais, como prazos de carência ou o "mês sem prestação", existem muitos encargos:

1. impostos (IOF) e taxas de administração sobre o próprio financiamento;

2. a exigência de seguro, para a instituição financeira estar segurada contra uma possível inadimplência do devedor ou sua família não "herdar" a dívida em caso de falecimento;

3. tarifas da documentação e da análise jurídica, entre outros.

Além desses custos relacionados diretamente com o financiamento, o tomador de crédito deverá ter em conta também as tributações e despesas referentes à atividade em si que estará praticando. Por exemplo:

4. ao comprar um imóvel, deverá pagar o "Imposto sobre a Transmissão de Bens Imóveis" (ITBI) ou um congênere, a escritura e o registro, depois pagar anualmente o IPTU;

5. no caso de um veículo automotivo, incidem emplacação, licenciamento, IPVA, seguro obrigatório, ...

> *Por fim, a taxa do financiamento pode ser somente pré-fixada, como temos tratado até aqui, ou ter uma parte pós-fixada ou corrigida, com o acréscimo da TR e da inflação.*

Este é o caso nos financiamentos imobiliários: a correção pode ser a cada período ou anual, multiplicando as parcelas pelo fator de correção.

Todos esses detalhes fogem do escopo do curso, mas convém conhecê-los de qualquer modo. Por isso, dedicamos a aula de hoje a pesquisar e apresentar um seminário breve a esse respeito.

Seminário

Construa uma relação completa de todos os encargos incidentes sobre os planos SAC e Price, incluindo informações de como seus valores totais são calculados e como eles são pagos.

Você pode optar por pesquisar a respeito de outros meios de financiamento disponíveis nas praças brasileiras, como o crédito consignado ou debitado em conta e o consórcio. Nesse caso, escolha um meio de financiamento sobre o qual você tem interesse e busque informações a respeito, como são pagas as parcelas, o prazo e o montante.

A Internet pode ser uma grande aliada nessa pesquisa: inicie sua missão em sítios bancários de sua preferência.

Apresente sua pesquisa em um seminário! Acesse a Ferramenta FÓRUNS e submeta um relato na seção *Situações cotidianas de financiamento — Parte II.*

7.4 Cálculos adicionais

No mesmo espírito da Seção 7.2 e a título de exemplo, apresentaremos mais algumas manipulações matemáticas dos planos de financiamento. Lembre que nossas fórmulas fornecem o valor das prestações em termos de três quantidades: o valor atual do financiamento, ou seja, o próprio capital que se quer financiar, a taxa de juros e o prazo (ou número de prestações) em que se quitará o débito.

Estas deduções exemplificarão também um desenvolvimento habitual do ensino–aprendizagem da Matemática: haverá cálculos que o leitor é convidado a realizar à parte, "com papel e lápis", sendo importante que o estudante receba essa impulso explícita e ativamente.

Plano SAC

Vejamos como deduzir a fórmula da prestação do plano SAC a partir de sua *forma,* isto é, assumamos que $P_t = X - Yt$, em que X e Y independem de t, com o objetivo de determinar essas duas componentes.

Calcularemos a soma atualizada das prestações, visando a igualá-la ao montante $A(1+r)^N$:

$$\sum_{t=1}^{N} P_t(1+r)^{N-t}.$$

Substituímos P_t por $X-Yt$, isto é, $(X-YN)+Y(N-t)$, e preparamos a reindexação $j = N - t$ distribuindo a somatória:

$$(X-YN)\sum_{t=1}^{N}(1+r)^{N-t} + Y\sum_{t=1}^{N}(N-t)(1+r)^{N-t}.$$

Já trabalhamos com a primeira soma, da progressão geométrica de termo inicial 1, constante $1+r$ e N termos. Os termos da segunda soma, que são $j(1+r)^j$ para j de 0 a $N-1$, não formam uma progressão geométrica, então apenas indicaremos seu resultado:

$$(X-YN)\frac{(1+r)^N-1}{r} + Y\cdot\frac{(N-1)(1+r)^{N+1} - N(1+r)^N + 1 + r}{r^2}.$$

Após substituirmos $(1+r)^{N+1}$ por $(1+r)^N(1+r)$, distribuirmos as somas e simplificarmos, obtemos

$$X\cdot\frac{(1+r)^N-1}{r} + Y\cdot\frac{(N+1)r + 1 - (1+r)^N(1+r)}{r^2},$$

de modo que devemos satisfazer a igualdade (depois de multiplicar tudo por r^2)

$$-rX + Y(Nr + r + 1) + \big[rX - Y(1 + r)\big](1 + r)^N = Ar^2(1 + r)^N.$$

Agora temos duas incógnitas X e Y, embora apenas uma equação, o que não basta para determiná-las. Por exemplo, com $Y = 0$, verifique que X se torna a prestação constante do método Price.

Porém, vemos que ambos os lados da equação são polinômios em r. Se X, Y não dependessem de r, *o que* NÃO *é o caso,* poderíamos lembrar que polinômios idênticos precisam ter os coeficientes correspondentes iguais, tirando daí $N + 1$ equações. O que podemos fazer é cogitar: e se X, Y tiverem apenas graus baixos de r, não devendo conter $(1+r)^N$? Nesse caso, comparando os lados da equação, deduzimos o sistema

$$\begin{cases} -rX + (Nr + r + 1)Y = 0 \\ \quad rX - \qquad\quad (1 + r)Y = Ar^2 \end{cases}$$

cuja resolução dá

$$P_t = X - Yt = \frac{A(Nr + r + 1)}{N} - \frac{Art}{N},$$

tal qual o método SAC.

Tabela Price

Outra dedução da expressão da parcela constante:

Pela identidade fundamental, temos uma definição recursiva do saldo devedor:

$$S_t = S_{t-1}(1 + r) - P \quad (\text{com } S_0 = A),$$

exceto que não pode ser utilizada em um programa de planilhas enquanto P for desconhecida.

Portanto,

$$\begin{aligned} S_1 &= A(1+r) - P, \\ S_2 &= \big[A(1+r) - P\big](1+r) - P \\ &= A(1+r)^2 - P(1+r) - P, \\ S_3 &= \big[A(1+r)^2 - P(1+r) - P\big](1+r) - P \\ &= A(1+r)^3 - P(1+r)^2 - P(1+r) - P \end{aligned}$$

e, em geral,

$$S_t = A(1+r)^t - P\sum_{j=0}^{t-1}(1+r)^j.$$

(Em um exercício, pediremos para formalizar essa conclusão por meio do Princípio da Indução.)

Encontramos essa soma mais uma vez: sabemos que

$$S_t = A(1+r)^t - P \cdot \frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

e, ao impor que $S_N = 0$, isolamos P normalmente.

O aspecto dos juros:

Agora, contemplemos novamente as expressões dos saldos devedores, por exemplo,

$$S_1 = A(1+r) - P \quad \text{e} \quad S_2 = A(1+r)^2 - P(1+r) - P.$$

Será que houve composição de juros ao passar de A para S_1, ou de S_1 para S_2?

Não, porque o juro que havia em S_1 era rA e ele foi contemplado por parte do pagamento de P, não apenas porque o plano de financiamento é idealizado assim, mas porque $P \geqslant rA$. (Essa desigualdade é facilmente observada na fórmula alternativa de P na Seção 7.2.)

Do mesmo modo, ao passar de S_1 para S_2, o juro rS_1 faz parte da parcela P, ou seja, sempre $P \geqslant rS_t$. (Deixaremos essa desigualdade como outro exercício.)

As expressões com potenciações não são testemunhas de juros compostos, são só e tão simplesmente efeito da distribuição dos juros sucessivos às *diferenças* das quais os saldos devedores consistem.

Exercícios

Estes exercícios são dissertativos e devem ser entregues na Ferramenta Escaninho.

1. Utilize o Princípio da Indução para demonstrar, a partir das relações $S_0 = A$ e $S_t = S_{t-1}(1+r) - P_t$, que

$$S_t = A(1+r)^t - \sum_{k=1}^{t} P_k(1+r)^{t-k}.$$

   Qual reindexação da somatória reproduz o caso particular visto no texto, no qual $P_k \equiv P$?

2. Demonstre que $P_t \geqslant rS_{t-1}$ a partir das fórmulas fechadas deduzidas para a parcela e o saldo devedor, em ambos os planos SAC e Price.

3. Para cada plano, calcule a prestação Q_t da "poupança virtual" e demonstre explicitamente que a soma dos valores capitalizados $Q_t(1+r)^{N-t}$, para t de 1 a N, é igual a A. Determine também o sinal de Q_t e, em caso negativo, explique se é um erro.

4. Não podemos deixar de verificar o que aconteceria com uma série uniforme de pagamentos para os mesmos valor atual, taxa e prazo: monte a série e compare uma rolagem de dívida comum com os planos de financiamento.

8

Segundo Ensaio

Este exame consiste de um ensaio ou redação que deverá incluir justificativas completas e ser entregue na Ferramenta Escaninho.

Utilize explicitamente as fórmulas que estudamos. Você pode obter informações suplementares em um sítio bancário; porém, cite o simulador utilizado e apresente os resultados obtidos em separado.

Um cidadão deseja financiar R$ 400.000 para adquirir um imóvel. Ele pode comprometer até R$ 3.000 por mês para pagar as prestações.

a) Encontre o prazo necessário (em meses) para que o cidadão possa financiar esse valor no plano SAC, com taxa de juros nominal de 12% ao ano. Qual será o montante pago?

b) Encontre o prazo necessário, agora no plano Price, com a mesma taxa de juros. Qual será o montante pago, nesse caso?

c) Um amigo oferece R$ 400.000 emprestados com os mesmos juros e sem plano de financiamento, isto é, com "rolagem" da dívida: o saldo devedor a cada mês, descontado o que for pago, sofre correção. Formalize esse regime e determine o prazo necessário e o montante pago para quitar a dívida. O que acontece se o amigo oferecer juros nominais de 9% a.a.?

D) Caso o cidadão invista esses R$ 3.000 em uma poupança (isenta de IR) mensalmente, que pague 3% a.a. nominais, após quantos meses inteiros ele haverá acumulado R$ 400.000 ? Formalize e classifique a série de pagamentos envolvida.

- Compare as alternativas "A", "B", "C" e "D" usando cada método: custo total, valor atual e taxa de retorno. Os métodos indicam opções distintas, ou todos concordam? Justifique a concordância ou discordância em termos do conceito de juro como aluguel do dinheiro.

- Suponha que os imóveis apresentem inflação de 6% a.a. nominais. Investindo na poupança, como acima, quando ele poderá comprar esse imóvel? Explique também como cada alternativa deve ser modificada para atualizar a dívida por um índice de inflação. (Desconsidere, somente para fins do exame, o reajuste da entrada do imóvel frente ao valor que o cidadão tenha guardado para ele.)

Algumas soluções

Capítulo 1

Seção 1.2: 1. "C". 2. "B". 3. "D". 4. "C". 5. "D".

Seção 1.3: 1. "A". 2. "C".

Capítulo 2

Seção 2.1: 1. "B". 2. "C".

Seção 2.2: 1. "C". 2. "B".

3. Com $M/C = 2$, isolamos n em $(1+r)^n = 2$ e $1+nr = 2$, resp. Com $M/C = 1/2$ e taxa de desconto $d > 0$, obtemos $-\ln 2/\ln(1-d)$ (a mesma regra de 72 funciona) e $n = 1/2d$, resp.

4. $18/100r$. 5. 0,121 (o valor exato é mais próximo de 0,122).

Capítulo 3

Seção 3.1: 1. "C". 2. "C". 3. "B" (demais alternativas requerem conhecer o prazo). 4. "D".

Seção 3.2: 1. "C". 2. "B". 3. Nominais 36% a.a. e 3% a.m., efetivas aprox. 41,2% a.a. e 2,91% a.m.

Seção 3.4: 1. "C". 2. "D". 3. "A". 4. "C".

Seção 3.5:

1. Na tributação integral, a taxa máxima é aprox. 1,9%. Na tributação apenas dos ganhos, o prazo importa: 25% para um ano; 25,7% para dois anos; 26,5% para três anos etc.

2. R$ 0 na primeira faixa; R$ 2.000 na segunda faixa; R$ 2.750 na terceira faixa. (Pode-se também calcular o abatimento no imposto, resp.: R$ 0; R$ 300; R$ 550.)

3. Chame o imposto (em reais) de D: a inversão não é possível para $D = 0$ porque o salário pode ser qualquer até R$ 2.000; para $0 < D \leqslant 450$, o salário é $2.000 + D/0{,}15$ (em reais); para $D > 450$, o salário é $2.750 + D/0{,}20$. Sendo L o salário líquido, em reais: para $0 \leqslant L \leqslant 2.000$, o bruto deve ser L; para $2.000 < L \leqslant 4.550$, o bruto é aprox. $L/0{,}85 - 352,94$; para $L > 4.550$, o bruto é $L/0{,}80 - 687{,}50$.

4. Taxas de entrada são como imposto sobre o capital; de saída como imposto sobre o montante bruto; de administração como um desconto da rentabilidade.

Capítulo 5

Seção 5.1: 1. “A”. 2. “D”.

Seção 5.2: 1. “D”. 2. “B”. 3. “B”.

Seção 5.3: 1. “D”. 2. “C”.

Capítulo 6

Seção 6.2: 1. “B”. 2. “A”.

Seção 6.3: 1. “C”. 2. “C”.

Capítulo 7

Seção 7.2: 1. “B”. 2. “D”.

Referências

COELHO, S. *Matemática financeira e análise de investimentos.* Cia. Editora Nacional; EDUSP, 1979.

MEC. *Base nacional comum curricular:* educação é a base. 2018.

RFB. *Imposto sobre a renda:* pessoa física: perguntas e respostas. 2020.

STN. *Tesouro direto:* módulo 1: introdução ao tesouro direto. 2017?

SUSEP. *Guia de orientação e defesa do consumidor dos mercados de seguros, previdência complementar aberta e capitalização.* 2017.

Utilizamos o sistema tipográfico LaTeX 2$_\varepsilon$ (TeX Live 2015) com a classe book e os pacotes actuarialangle, amsmath, amssymb, babel, bookmark, ccicons, enumerate, fix-cm, fontenc, graphicx, indentfirst, inputenc, sectsty e typearea.