Fundamentos de Cálculo – MA 22
1º sem. 2019 – Diurno – Santo André
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Primeira Prova – 26/04/2019

Nome	**RA**
Resolução e gabarito de correção	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **4** (quatro) folhas, incluindo esta, e **5** (cinco) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Calcule $\lim_{y\to\infty} \frac{y^{30}+7y^{19}-8}{(5y-2)^{17}(4-y^{13})}$. (1pto)

$$= \lim_{y\to\infty} \frac{y^{30}\left(1+\frac{7}{y^{11}}-\frac{8}{y^{30}}\right)}{\cancel{y^{17}}\left(5-\frac{2}{y}\right)^{17}\cancel{y^{13}}\left(\frac{4}{y^{13}}-1\right)} \quad \underline{(0{,}5 \text{ pto})}$$

$$= \frac{1+0-0}{(5-0)^{17}(0-1)} = \frac{-1}{5^{17}} \quad \underline{(0{,}5 \text{ pto})}$$

(2) Mostre que $10^x = x^{1000}$ tem ao menos duas soluções positivas. (1pto)

A função $f(x) = 10^x - x^{1000}$ é contínua em $\mathbb{R}^{>0}$. Temos:

$f(1) = 10^1 - 1^{1000} = 10 - 1 = 9 > 0$

$f(10) = 10^{10} - 10^{1000} < 0$ (note mesma base)

$f(10^4) = 10^{10^4} - (10^4)^{1000} = 10^{10.000} - 10^{4.000} > 0$ (note mesma base)

Pelo TVI, há uma raiz em $]1,10[$ e $\underline{\text{outra}}$ em $]10,10^4[$.

$\hookrightarrow \underline{(0{,}5 \text{ pto})}$ $\hookrightarrow \underline{(0{,}5 \text{ pto})}$

(3) Defina o que é um subconjunto aberto dos reais e mostre que um intervalo é aberto se e somente se não contém suas pontas. (2pts)

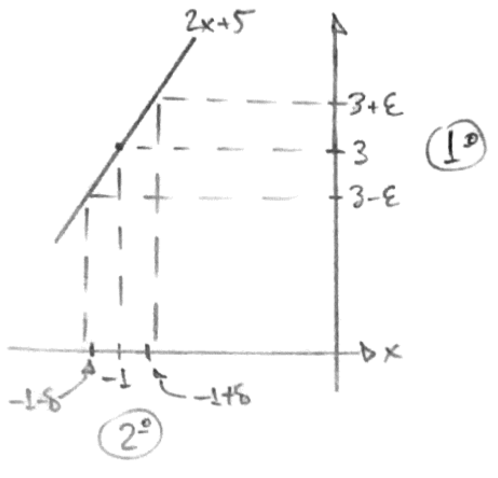
$A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto $\Leftrightarrow (\forall x \in A)(\exists \varepsilon > 0)\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq A$ $\underline{(1 \text{ pto})}$

Suponha I intervalo com pontas $a<b$; a é a ponta esquerda:

1) Se I é aberto e $I \ni a$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subseteq I$. Mas, daí, $a - \frac{\varepsilon}{2} \in I$, o que contradiz a ser a ponta esquerda. Analogamente, $b \notin I$. $\underline{(0{,}5 \text{ pto})}$

2) Se $I \not\ni a, b$ e $x \in I$, queremos achar $\varepsilon > 0$ tal que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq I$. Como $x \neq a, b$ (afinal, $x \in I$, mas $a, b \notin I$) e a, b são as pontas de I, temos $a < x < b$. Basta tomar $\varepsilon = \min(x-a, b-x) > 0$: por I ser intervalo, contém todo $]a,b[$ e portanto $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. $\underline{(0{,}5 \text{ pto})}$

(4) Mostre graficamente que $\lim_{x \to (-1)} 2x + 5 = 3$, indicando a ordem em que as tolerâncias são tomadas. Determine δ em função de ε e verifique, para todo $x \in \mathbb{R}$ e agora algebricamente, que $0 < |x - (-1)| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |(2x + 5) - 3| < \varepsilon$. (3pts)



(1 pto)

A partir do gráfico, como a reta tem inclinação 2, uma variação de ε nas ordenadas corresponde a uma variação de $\frac{\varepsilon}{2}$ nas abscissas.

Então tomamos $\delta = \varepsilon/2$. (1 pto)

Se $0 < |x-(-1)| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$, então $|x+1| < \frac{\varepsilon}{2}$, donde $|2x+2| < \varepsilon$.

Portanto, $|2x+5-3| < \varepsilon$. (1 pto)

(5) A partir da definição por ε e δ, prove com rigor que a soma de duas funções contínuas é contínua e argumente (não é preciso todo o rigor) que a função de Thomae

$$f:]0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1/n & \text{se } x \text{ é } m/n \text{ reduzido} \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

é contínua somente nos irracionais. (3pts)

Suponha que f, g são contínuas em a, para mostrar que $f+g$ também é contínua em a. Então:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$;

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\forall x \in D_g)\ |x-a| < \eta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon$.

Dado $E > 0$, tome $\varepsilon = E/2$ e δ, η para tal ε, depois tome $\Delta = \min(\delta, \eta)$. Se $|x-a| < \Delta$, então $|x-a| < \delta, \eta$, donde $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ e $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$, logo, $|(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \varepsilon + \varepsilon = E$, como desejado. (1pto)

Quanto à função de Thomae, seja $a \in]0,1]$. Se a é racional, então $f(a) > 0$ e podemos tomar $0 < \varepsilon < f(a)$. Por menor que seja $\delta > 0$, existem irracionais $x \in]a-\delta, a+\delta[$ com $f(x) = 0$, logo, $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$. Então f é descontínua em a. (1pto)

Porém, se a é irracional, então $f(a) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que, em $]a-\delta, a+\delta[$, os racionais todos tenham denominador maior que $1/\varepsilon$: o conjunto $\{\frac{m}{n} \mid n \leq 1/\varepsilon\}$ é finito, então tem distância positiva de a ($\neq \frac{m}{n}$). Portanto, se $x \in]a-\delta, a+\delta[$, vem $f(x) = 0$ ou $f(x) = 1/n < \varepsilon$, de modo que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. (1pto)