Fundamentos de Cálculo – MA 22
1º sem. 2019 – Diurno – Santo André
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Segunda Prova – 05/07/2019

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	——

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **4** (quatro) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Determine o intervalo de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/2^{n+1}$. Não é preciso discutir as pontas. (2pts)

A série está centrada em $x_0=0$. Os coeficientes são $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$, então o raio é $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{n+1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{1+1/n} = 2$ ou também $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$. Então o intervalo aberto é $]0-2,0+2[=]-2,2[$. ($\underline{1\text{pto}}$ montagem, $\underline{1\text{pto}}$ cálculo).

(Em $x=-2$, a série é $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\ldots$, não converge; em $x=2$, é $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$, não converge.)

(2) Demonstre que a função de Dirichlet

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

não é integrável segundo Darboux ou Riemann. (2pts)

Seja $P = \{x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\}$ uma partição qualquer de $[0,1]$. Em qualquer subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, encontramos tanto números racionais como irracionais, digamos a_i e b_i, respectivamente.

Então:

$$s(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i) \cdot \inf_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i) \underbrace{f(b_i)}_{0} = 0$$

e $$S(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i) \sup_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i) \underbrace{f(a_i)}_{1} = x_n - x_0 = 1.$$

(Essas também são somas de Riemann). ($\underline{1\text{pto}}$)

Portanto:

$$s(f) = \sup_P s(f,P) = 0 \quad \text{e} \quad S(f) = \inf_P S(f,P) = 1,$$ ou seja, as integrais inferior e superior são diferentes. (Ou, também, as somas de Riemann não convergem para um único número.) ($\underline{1\text{pto}}$)

(3) Identifique a melhor aproximação afim à função $\sqrt{x}$ em 9 e utilize-a para estimar $\sqrt{10}$. Demonstre a obtenção dessa aproximação por meio dos erros cometidos. (3pts)

Em geral, $L(x) = f(a) + f'(a).(x-a)$. Temos $a = 9$, $f(x) = \sqrt{x}$ e portanto $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (ou seja, $(x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$), donde

$$L(x) = 3 + \frac{1}{6}(x-9) \quad (\underline{1\,\text{pto}})$$

$$\sqrt{10} \approx L(10) = 3 + \frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{19}{6} \quad (\underline{1\,\text{pto}})$$

Para obter $L(x)$, minimizamos os erros $L(x) - f(x)$ e $\frac{L(x)-f(x)}{x-a}$ <u>em a</u>: pomos $L(x) = mx + k$ para determinar m e k.

$$L(a) - f(a) = 0 \Rightarrow ma + k - f(a) = 0 \Rightarrow ma + k = f(a), \text{ ou } k = f(a) - ma.$$

$$\lim_{x\to a} \frac{L(x)-f(x)}{x-a} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{mx+k-f(x)}{x-a} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{mx+f(a)-ma-f(x)}{x-a}$$

$$= 0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\left(m - \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) = 0 \Rightarrow m - f'(a) = 0, \text{ ou } m = f'(a).$$

Enfim, $L(x) = mx + k = \underbrace{f'(a)}_{m}.x + \underbrace{f(a) - \underbrace{f'(a)}_{m}a}_{k}$ etc. $(\underline{1\,\text{pto}})$

(4) Uma ferrovia e uma rodovia, ambas retilíneas, encontram-se em 90º. Um trem e um carro dirigem-se à intersecção com velocidades de 200 km/h e 160 km/h respectivamente. Quando o trem dista 1200 m da intersecção e o carro apenas 500 m, qual é a velocidade de aproximação entre os dois? Compare com a velocidade relativa. (3pts)

Modelamos a ferrovia como o eixo Ox, sendo $(x,0)$ a posição do trem ($x(t)$ em função do tempo) e a rodovia como Oy, sendo $(0,y)$ a posição do carro ($y(t)$ em função do tempo). Pondo $x=1{,}200$ e $y=0{,}500$ (em km) nesse instante, note que $\dot{x}=-200$ e $\dot{y}=-160$ (negativos, no sentido da origem). (1pto)

A distância entre o trem e o carro é $d=\|(x,0)-(0,y)\|=$
$=\sqrt{(x-0)^2+(0-y)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$, então a velocidade de aproximação é

$$\dot{d}=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\underset{\text{regra da cadeia}}{(x^2+y^2)'}=\frac{2x\cdot\dot{x}+2y\dot{y}}{2\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\frac{1{,}2(-200)+0{,}5(-160)}{\sqrt{1{,}2^2+0{,}5^2}}=\frac{-320}{1{,}3}$$

(negativa porque a distância diminui) (1pto)

As velocidades vetoriais são $(\dot{x},0)=\dot{x}\vec{\imath}$ e $(0,\dot{y})=\dot{y}\vec{\jmath}$, então a velocidade relativa é $\dot{x}\vec{\imath}-\dot{y}\vec{\jmath}$ (ou $\dot{y}\vec{\jmath}-\dot{x}\vec{\imath}$), dando $(200,-160)$ com magnitude $\sqrt{200^2+160^2}=40\sqrt{41}$. (1pto)

(Os valores são cerca 246 km/h e 256 km/h, resp.)