Funções de Várias Variáveis – BCN 0407
1° quad. 2018 – Noturno – Santo André
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Primeira Prova – Versão Q – 27/03/2018

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **4** (quatro) folhas, incluindo esta, e **3** (três) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva cada item, apresentando apenas as soluções finais. O primeiro item está resolvido como exemplo. (4pts)

Ex.: Determine a derivada parcial de $x^2y - 3x^y$ com respeito a y.

$$\boxed{x^2 - 3x^y \ln x}$$

(a) Determine $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x \operatorname{sen} y}{\cos(x^2+y^2)}\right)$.

$$\boxed{\frac{x\cos y \cos(x^2+y^2) - x \operatorname{sen} y\,(-\operatorname{sen}(x^2+y^2)).2y}{\cos^2(x^2+y^2)}}$$ (1pto)

(b) Sejam $f(x,y) = x^2y^2 - x + 2y$, $x = \sqrt{s}$ e $y = st^3$. Determine $\frac{\partial f}{\partial s}(\underbrace{1,-2}_{(s,t)})$.

note

$$\boxed{175{,}5 \quad \text{ou} \quad \frac{351}{2}}$$ (1pto)

(c) Suponha que $f(x,y)$ é diferenciável em $(1,2)$, $\frac{\partial f}{\partial u}(1,2) = -5$ para $u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = 10$ para $v = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$. Determine $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

$$\boxed{-10}$$ (1pto)

(d) Determine o determinante jacobiano da transformação $\begin{cases} x = e^{u-v}, \\ y = e^{u+v}. \end{cases}$

$$\boxed{2e^{2u}}$$ (1pto)

(a) (Lista 3, ex. 1f)

(b) (Lista 3, ex. 12) $\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} = (2xy^2-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{s}} + (x^2 2y+2).t^3 =$
$= (2\sqrt{s}.s^2t^6-1)\frac{1}{2\sqrt{s}} + (\sqrt{s}^2.2st^3+2)t^3 = (s^2t^6 - \frac{1}{2\sqrt{s}}) + (2s^2t^3+2)t^3 \Big|_{\substack{s=1\\t=-2}} = (1.64 - \frac{1}{2}) +$
$+ (2.1(-8)+2)(-8) = 175{,}5$.

(c) (Lista 4, ex. 6b) Sejam $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ e $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$. Então $\frac{\partial f}{\partial u}(1,2) = \langle(\alpha,\beta)|u\rangle$
$\Rightarrow \frac{3}{5}\alpha + \frac{4}{5}\beta = -5$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = \langle(\alpha,\beta)|v\rangle \Rightarrow \frac{4}{5}\alpha - \frac{3}{5}\beta = 10$. Isole $\alpha = 5$ e $\beta = -10$.

(d) (Lista 7, ex. 8d reduzido) $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{u-v} & e^{u-v}(-1) \\ e^{u+v} & e^{u+v} \end{vmatrix} = e^{u-v+u+v} - e^{u-v+u+v}(-1) =$
$= 2e^{2u}$.

(2) Determine $\int_D 1\, d(x,y)$ em que D consiste dos pontos satisfazendo $4(x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 4$. (3pts)

(Lista 6, ex. 7g)

D é uma elipse centrada em (3,2). Mudança de coordenadas:

$$\Phi : \begin{cases} x = 3 + r\cos\theta \\ y = 2 + 2r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \quad \text{para } 0 < r \leq 1,\ 0 \leq \theta < 2\pi \qquad (\underline{1\text{pto}})$$

Jacobiano: $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ 2\,\text{sen}\,\theta & 2r\cos\theta \end{vmatrix} = 2r\cos^2\theta - (-2r\,\text{sen}^2\theta) = 2r$

$(\underline{1\text{pto}})$

Integral: $\int_D 1\, d(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 1 \cdot \underset{|J_\Phi|}{2r}\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[r^2\right]_{r=0}^{r=1} d\theta =$

$= 2\pi$ $(\underline{1\text{pto}})$

(Integrando 1: é a área da elipse $\pi\cdot$(semieixo maior)$\cdot$(semieixo menor).)

(3) Determine a melhor aproximação afim (linear) para a expressão $(xe^y)^8$ no ponto $(1;0)$ e use-a para estimar seu valor em $(0{,}99; 0{,}02)$. (3pts)

(Lista 3, ex. 8a)

Função $f(x,y) = (xe^y)^8$ no ponto $(a,b) = (1,0)$.

Melhor aproximação:

$$L(x,y) = f(a,b) + f'(a,b) \cdot \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} \qquad (\underline{1pto})$$

$$= (1 \cdot e^0)^8 + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \right] \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-0 \end{bmatrix} =$$

$$= 1 + \left[8(xe^y)^7 \cdot e^y \quad 8(xe^y)^7 \cdot xe^y \right]_{\substack{x=a=1 \\ y=b=0}} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix} =$$

$$= 1 + \left[8 \cdot 1^7 \cdot 1 \quad 8 \cdot 1^7 \cdot 1 \right] \begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix} = 1 + 8(x-1) + 8y$$

$$= -7 + 8x + 8y \qquad (\underline{1pto})$$

No ponto especificado: $L(0{,}99; 0{,}02) = 1 + 8(-0{,}01) + 8 \cdot 0{,}02 =$
$= 1{,}08$. $(\underline{1pto})$