

Introdução às EDO – BCN 0405
2º quad. 2017 – Diurno – Santo André
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Primeira Prova – Versão X – 07/07/2017

Nome	RA
Resolução e gabarito de correção	_____

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta preta ou azul.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use lápis para responder as questões. Não é necessário nem recomendável passar respostas a caneta.
- Nada fora dos quadros de resposta será considerado na correção. Cada um deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente lápis, caneta, borracha e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) páginas, incluindo esta, e **3** (três) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva as equações, apresentando apenas as soluções finais. A primeira equação está resolvida como exemplo. (4pts)

Ex.: $y' = -5y$.

$y(x) =$

Ce^{-5x}

(a) $x dx + y dy = 0$.

$y(x) =$

$\pm \sqrt{C - x^2}$

(1pt)

(b) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

$y(x) =$

$(x^2 + D)e^{-x^2}$

(1pt)

(c) $y' = \frac{-x^2 - y^2}{2xy}$.

$y(x) =$

$\pm \sqrt{\frac{C}{x} - \frac{x^2}{3}}$

(1pt)

(use $y = xz$)

(d) $x^2 y' = y^3 - 2xy$.

$y(x) =$

$\pm \sqrt{\frac{5x}{2 + Ex^5}}$

(1pt)

(use $y = z^{-1/2}$)

(Sugestão: confira seus resultados por substituição!)

(a) (Lista 1, ex. 5a) Separação de variáveis: $y dy = -x dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1$ etc.

(b) (Lista 1, ex. 6g) Linear: PH $y' + 2xy = 0 \Rightarrow y = Ce^{-x^2} \Rightarrow$ VC: $C'e^{-x^2} + Ce^{-x^2}(-2x) + 2xCe^{-x^2} = 2xe^{-x^2} \Rightarrow C' = 2x \Rightarrow C = x^2 + D$ etc.

(c) (Lista 1, ex. 5j) Homogênea: $(xz)' = \frac{-x^2 - (xz)^2}{2x(xz)} \Rightarrow z + xz' = \frac{-1 - z^2}{2z} \Rightarrow 2xz z' = -1 - 3z^2$
 $\Rightarrow \frac{z dz}{-3z^2 - 1} = \frac{dx}{2x} \Rightarrow -\frac{1}{6} \ln|-3z^2 - 1| = \frac{1}{2} \ln|x| + C_1 \Rightarrow |-3z^2 - 1| = C_2 |x|^3 \Rightarrow z = \pm \sqrt{\frac{C_3 x^3 - 1}{3}}$ etc.

(d) (Lista 1, ex. 11e) Bernoulli: $x^2(z^{-1/2})' = (z^{-1/2})^3 - 2x(z^{-1/2}) \Rightarrow x^2(-\frac{1}{2})z^{-3/2} z' = z^{-3/2} - 2xz^{-1/2}$
 $\Rightarrow x^2 z' = -2 + 4xz$ linear \Rightarrow PH: $x^2 z' = 4xz \Rightarrow z = Cx^4 \Rightarrow$ VC: $x^2(C'x^4 + C(4x^3)) = -2 + 4xCx^4$
 $\Rightarrow C'x^6 = -2 \Rightarrow C = \frac{2}{5}x^{-5} + D \Rightarrow z = \frac{2}{5x} + Dx^4 \Rightarrow y = \frac{1}{\pm \sqrt{z}}$ etc.

(2) Sabe-se que o Césio-137 é um elemento radioativo e que a sua meia-vida é de 30 anos. Suponha que temos uma amostra com 200mg de Césio-137. Depois de quanto tempo teremos apenas 1mg de Césio-137 na amostra? (3pts)

(Lista 2, ex. 2c) Decaimento radioativo: PVI $x' = -ax$, $x(0) = x_0 \Rightarrow$
 \Rightarrow solução $x = x_0 e^{-at}$ (1pt) (eq. autônoma por sep. variáveis)

Dado da meia-vida: $\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-a \cdot 30} \Rightarrow e^{a \cdot 30} = 2 \Rightarrow 30a = \ln 2$

$\Rightarrow a = \frac{\ln 2}{30}$ (1pt)

Tempo pedido: $1 = 200 e^{-at} \Rightarrow e^{at} = 200 \Rightarrow at = \ln 200 \Rightarrow t =$
 $= \frac{\ln 200}{a} = \frac{\ln 200}{\ln 2} \cdot 30$ (1pt)

(3) Determine e classifique os equilíbrios da equação $y' = y^2(y^2 - 1)$. (3pts)

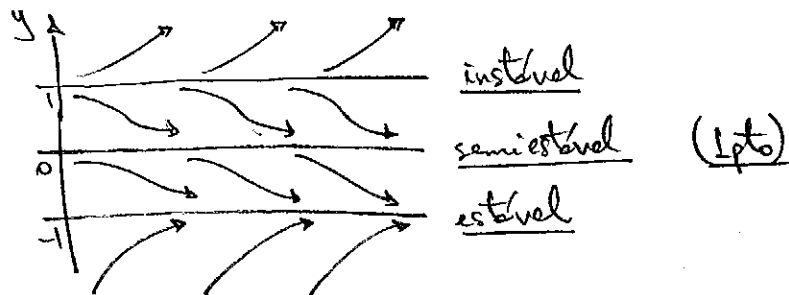
(Lista 2, ex. 9f) Equação autônoma $y' = g(y) = y^2(y^2 - 1) \Rightarrow$ raízes de g são 0, 1 e -1 equilíbrios (1pt)

Estudo dos sinais de g :

	-1	0	1	y
y^2	⊕	⊕	⊕	⊕
$y-1$	⊖	⊖	⊖	⊕
$y+1$	⊖	⊕	⊕	⊕
$g(y)$	⊕	⊖	⊖	⊕

(1pt)

Estudo do comportamento de y :



(1pt)